MaSR tln 85

4

Mathesis. Systemata & methodi 130.

R

Lehrbegrif
der gesamten
Mathematik.

Aufgesetzt
von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten,
er Phil. Doct. der Mathem. Professor zu Bützow, der Churfl. Bay-
rischen Akademie der Wissenschaften zu München und der Holländi-
schen Gesellschaft der Wissenschaften zu Harlem Mitglied.

Der Vierte Theil.

Die Mechanik der festen Körper.

Greifswald,
ruckt und verlegt von Anton Ferdin. Röse. 1769.

BIBLIOTHECA
SUDETICA
GLOGOVIENSIS

Die Geschichte
von
Heinrich Gulden Hasen.

Der Heinrich Gulden.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Der

unter dem gnädigsten Schutz

Sr. Churfürstl. Durchl.

von Bayern

blühenden

Akademie der Wissenschaften

in

München

widmet

diesen vierten Theil

seines

Lehrbegrifs der Mathematik

als

ein Zeugniß

seiner immerwährenden Verehrung

und

collegialischen Hochachtung

der Verfasser.

Vorrede.

Die Mechanik läst sich nicht wohl mit einiger Vollständigkeit abhandeln, wenn man nur soviele Theorie voraussetzen darf, als eigentlich zur Elementar-Mathematik gehört. Allein es sind nur wenige, die sich mit der theoretischen Mathematik in ihrem ganzen Umfang bekannt machen; und viele werden durch das Vorurtheil davon abgehalten: so weit habe keiner zu gehen nöthig, der nicht etwa mit der Absicht umgehe, einmahl Professor der Mathematik zu werden. Manche geschickte und

fähige Köpfe dürften für sich wohl geneigt seyn, mehr Theorie zu lernen: allein die Zeit, welche sie auf Universitäten zubringen können, ist zu kurz, und die Nothwendigkeit zwingt sie, wegen andrer Lehrstunden, die Mathematischen zu versäumen. Verlangt man von ihnen, daß sie sich zuforderst durch Erlernung der Algebra und höhern Geometrie dazu vorbereiten sollen, die practische Mathematik hiernechst erstlich recht mit Nutzen zu treiben, so sehen sie einen so hohen Berg vor sich, der sie überall von dem Versuch abschreckt, auch nur bis auf eine mäßige Höhe desselben hinan zu steigen. Und dennoch kommen manche nach der Zeit unter solche Umstände, wo ihnen eine nähere Bekanntschaft mit dieser oder jenen besondern Practisch-Mathematischen Wissenschaft überaus nützlich seyn würde.

Man wird mir leicht Beyfall geben, wenn ich sage, daß die Mechanischen Wissenschaften ihre Brauchbarkeit vorzüglich bey tausend

Vorrede.

Vorkommenheiten des gemeinen Lebens beweisen, und daß es der Mühe wohl verlohne, Studirende zu ermuntern, die Erlernung derselben auf Universitäten nicht zu verabsäumen. Eben dies sind die Gründe, welche mich bewogen haben, schon in diesem vierten Theil meines Lehrbegrifs der Mathematik eine Menge von Untersuchungen vorzutragen, welche man vermuthlich hier deswegen noch nicht erwarten wird, weil in den beyden ersten Theilen die höhere theoretische Mathematik noch nicht vorgetragen ist. Ich habe in den Vortrag der Mechanik selbst die ersten Gründe der Differential- und Integral-Rechnung eingeflochten, und dies hat mich in den Stand gesetzt, dasjenige, was in dieser Wissenschaft mit der Ausübung in der nechsten Verbindung stehet, ziemlich vollständig abzuhandeln. Ich schmeichle mich damit, auf diesem Wege der höhern Mathematik viel mehr Liebhaber, als auf dem gewöhnlichen Wege zu ziehen, wenn ich Anfänger zuerst mit einer Menge von

practisch nützlichen Sachen bekannt mache, und auf solche Art von dem ungemein grossen Nutzen der höhern theoretischen Mathematik überzeuge, bevor ich ihnen das ganze theoretische System vortrage. Es ist gewiß, daß die Theorie an sich für nachdenkende Köpfe ihre grossen Reitzungen hat: allein es ist auch soviel gewiß, daß viele über die Erlernung der Theorie ermüden, bevor sie zur Anwendung schreiten, welches so leicht nicht geschehen würde, wenn sie früher lernten, wie sich diese Theorien bey practischen Untersuchungen anwenden lassen. „Die Analysis und „besonders die Rechnung des Unendlichen „sind nothwendig, die Natur kennen zu lernen, „wie es nothwendig ist, Latein zu verstehen, „um den Cicero und Virgil zu lesen: sie wer„den durch ihre Anwendung auf die Kenntniß „der Natur erweitert, und mit neuen Kunst„griffen vermehrt, wie man in der Sprache „der Römischen Schriftsteller durch fleissiges „Lesen geübter und vollkommener wird.„

(Herr

Vorrede.

(Herr Hofr. Kästners Vorrede zu den Anfangsgründen der höhern Mechanik). Wenn dies wahr ist, so halte ich davor, daß es sehr rathsam sey, Anfänger sobald es seyn kann, mit der Natur bekannt zu machen: dies wird sie hiernechst von selbst reitzen, ihre theoretischen Kenntnisse immer mehr auszubilden.

Ob ich übrigens die ganze Mechanik so vorgetragen habe, daß es nunmehro nicht mehr nöthig sey, mit dem Herrn **Daniel Bernoulli** zu zweifeln, ob auch die Gesetze der Bewegung in die Classe der nothwendigen Vernunftwahrheiten gehören: überlasse ich Kennern zur Prüfung. Ich bin durch die Untersuchungen, welche Herr Hofrath **Kästner** im 1sten Abschnitt seiner **Anfangsgründen der höhern Mechanik** über die Wahrheit und Nothwendigkeit der Formul angestellet hat, auf welche sich die ganze Mechanik gründet, veranlasset worden, dieser Sache aufs neue nachzudenken; und ich

habe im 47 bis 53 §. (M. s. die 465 bis 471 S. des III Theils) ein Verfahren gebraucht, welches denjenigen ganz ähnlich ist, dessen sich Hr. Hofr. Kästner so glücklich bedient hat, die Theorie vom Hebel zu beweisen. Auf eine ähnliche Art bin ich im IX Abschnitt bey dem Beweise der Formul zu Werk gegangen, welche bey der Theorie von der Bewegung fester Körper um eine unbewegliche Axe zum Grunde liegt. Ueberhaupt bin ich dahin bemühet gewesen, alle Undeutlichkeit der Begriffe in dieser Wissenschaft sorgfältig zu vermeiden, wofür man sich nach meiner Einsicht hier nicht allemahl genug in acht genommen hat. Ein sehr in die Augen fallendes Beyspiel davon ist die Leibnitz-Bernoullische Theorie von den lebendigen Kräften, wovon ich im XVII Abschnitt meine Gedanken geäussert habe.

Der Theorie vom Maschinen-Wesen sind die letztern Abschnitte gewidmet. Mir ist es so vorgekommen, daß auch hier manche Leh-

ren noch einer nähern Aufklärung und genauern Bestimmung bedürften. Wenn man eine Maschine im Zustande der Bewegung betrachtet, so muß man den Zustand, worin sie sich so lange befindet, als ihre Bewegung von der angebrachten Kraft noch beschleuniget wird, von dem Beharrungsstande wohl unterscheiden, worin sie sich alsdenn allererst befindet, nachdem ihre Bewegung schon gleichförmig geworden ist. Und wenn man nach dem vortheilhaftesten Gebrauch der Maschine frägt; so ist es zweyerley, ob man frägt, wie ihre Einrichtung beschaffen seyn müsse, damit sie von der angebrachten Kraft am schnellesten beschleuniget werde; oder ob man frägt, wie sie eingerichtet seyn müsse, damit im Beharrungsstande der gröste mögliche Effect erfolge? In dem letztern Sinn läst sich die Frage nur alsdenn aufwerfen, wenn die Kraft, welche die Maschine treibt, veränderlich ist, und von der Geschwindigkeit der Maschine abhängt. Es scheint, daß Herr Schober in seinem Ver-

such einer Theorie der Ueberwucht. Leipz. 1751. die beyden Bedeutungen dieser Frage nicht zulänglich unterschieden habe: deswegen habe ich seinen Vortrag zu ergänzen gesucht. Im folgenden fünften Theil wird mir die Hydraulik Gelegenheit geben, weit mehreres vom Maschinen-Wesen beyzufügen.

Wegen Kürze der Zeit habe ich diesen 4ten Theil nach dem Abdruck nicht ganz durchgehen und die etwa eingeschlichene Fehler aufsuchen können. Das Verzeichniß derselben soll dem 5ten Theile beygefüget werden.

Bützow im März des Jahrs 1769.

Wencesl. Joh. Gustav Karsten.

Inhalt
des Vierten Theils.

Weitere Ausführung der Mechanik der festen Körper.

Der V. Abschnitt. Von der freyen Bewegung geworfener schwerer Körper, nebst allgemeinen Betrachtungen über die Bewegung in krummen Linien.

Der VI. Abschnitt. Von den Kräften, die nicht gleichförmig beschleunigen.

Der VII. Abschnitt. Von der Schwungbewegung im Kreise.

Der VIII. Abschnitt. Vom Schwunge der einfachen Pendul.

Der IX. Abschnitt. Von der Schwungbewegung fester Körper um eine unbewegliche Axe.

Der X. Abschnitt. Von den Kräften, welche die Schwungbewegung um eine unbewegliche Axe ändern.

Der XI. Abschnitt. Vom Schwunge der zusammengesetzten Pendul.

Der XII. Abschnitt. Von der relativen und scheinbaren Bewegung.

Der XIII. Abschnitt. Von der Bewegung des Schwerpuncts eines Systems mehrerer Körper.

Der XIV. Abschnitt. Von der freyen Bewegung fester Körper, die sich beym Fortgehen zugleich um eine Axe drehen.

Der XV. Abschnitt. Vom centralen Stosse der Körper an einander.

Der

Inhalt.

Der XVI. Abschnitt. Vom Stosse fester Körper an andre, die nicht ausweichen.
Der XVII. Abschnitt. Vom Maaß der Kräfte des Stosses.
Der XVIII. Abschnitt. Vom eccentrischen Stoß und dem Mittelpunct des Stosses.
Der XIX. Abschnitt. Vom Widerstande, den feste Körper leiden, die sich im flüßigen bewegen.
Der XX. Abschnitt. Vom Steigen und Fall der schweren Körper in der Luft.
Der XXI. Abschnitt. Von der Ueberwucht bey Maschinen, die durch Gewichte bewegt werden.
Der XXII. Abschnitt. Von der Friction bewegter Körper.
Der XXIII. Abschnitt. Das Allgemeine der Theorie vom Maschinen-Wesen.
Der XXIV. Abschnitt. Von Maschinen, die durch Menschen oder Thiere bewegt werden.
Der XXV. Abschnitt. Regeln zur vollständigen Berechnung des gesamten Widerstandes bey Maschinen.
Der XXVI. Abschnitt. Beschreibung eines Korn-Mahl-Ganges, nebst Berechnung einer Hand- und Roß-Mühle.

Weitere Ausführung

der Mechanik der festen Körper.

Der V. Abschnitt.

Von der freyen Bewegung geworfener schwerer Körper, nebst allgemeinen Betrachtungen über die Bewegung in krummen Linien.

69 §.

Es sey AH eine Horizontallinie, und DA vertical. Ferner sey A ein schwerer Punct, dessen Masse $= M$ ist (wodurch man hier den Schwerpunct eines jeden Körpers verstehen kan); und es werde demselben nach der Richtung AT, die in der verticalen Ebene DAH liegt, und gegen den Horizont unter dem Winkel $HAT = \alpha$ geneigt ist, die Geschwindigkeit $= h$ mitgetheilt: man sucht 142 Fig.

den Ort des Körpers *M* nach verflossener Zeit *t*.

Aufl. Es sey AB = *h*: so zerlegt sich diese Geschwindigkeit nach der horizontalen und verticalen Richtung in die Geschwindigkeiten AC = *h*.cosα, und AD = *h*.sinα. Wenn nun der Körper nicht schwer wäre: so würde er in der Zeit *t* von A nach T gerückt seyn, und man hätte AT = *ht*. Vermöge eben dieser Bewegung aber wäre er in der Zeit *t* von der Verticallinie AD, um die Weite AP = *ht* cosα abgewichen, und von der Horizontallinie AH um die Höhe AF = *ht* sinα, aufwärts gestiegen. Indem aber der Körper nach der verticalen Richtung aufwärts steigt, drückt ihm die Schwere entgegen. Sie drückt nemlich den Körper allemahl vertical unterwärts, der Körper mag ruhen, oder in Bewegung seyn, und verzögert im letzten Falle seine Bewegung nach der verticalen Richtung AF. Sie macht daher, daß der Körper in der Zeit *t* nur um das Stück AR = *ht* sinα — *gtt* steigt. Der Bewegung nach der Horizontallinie steht nichts entgegen. Deswegen wird der Körper am Ende der Zeit *t* von der Verticallinie um das Stück AP = *ht* cosα, entfernt seyn. Demnach verzeichne man das Parallelogramm APMR: so ist M der gesuchte Ort des Körpers, am Ende der Zeit *t* (10 §.)

70 §.

142 Für *t* = 1 Sec. nehme man AC = *h* cosα, und
Fig. AK = *h* sinα — *g*, und verzeichne das Rechteck CAKL: so ist nach einer Secunde der Körper in L. Auf solche Art kan man nach und nach *t* = 2 Sec, *t* = 3 Sec. u. s. f. setzen, und die Puncte suchen, welche die Oerter des Körpers für diese Zeiten seyn werden.

den. Man siehet leicht, daß diese Puncte nicht in grader Linie liegen können. Wenn eine grade Linie von A nach L, auch durch M gienge: so wäre AC: AP = CL: PM, oder $h \cos\alpha : ht \cos\alpha = 1 : t = h \sin\alpha - g : ht \sin\alpha - gtt$, welches falsch ist. Wenn man statt t zweene Werthe setzt, die so wenig, als man will, unterschieden sind, und die zugehörigen Oerter des Körpers sucht: so kan man allemahl noch einen dritten Werth statt t setzen, der zwischen den beyden vorigen fällt, und den zugehörigen Ort des Körpers suchen, da man sich denn leicht, wie vorhin überzeugt, daß diese drey Oerter nicht in grader Linie liegen. Also ist der Weg des Körpers eine krumme Linie.

71 §.

Diese krumme Linie kehrt die hole Seite gegen den Horizont; denn man sieht leicht, daß der Bogen AM zwischen AT und AH liegen müsse. Die Höhen CL, PM wachsen anfangs so lange, bis $t = \frac{h \sin\alpha}{2g}$ ist. Denn der Masse M Geschwindigkeit nach der Richtung AD ist $= h \sin\alpha - 2gt$ am Ende der Zeit t, und wird $= 0$, wenn $t = \frac{h \sin\alpha}{2g}$ ist. Für grössere Werthe von t wird diese Geschwindigkeit negativ, und der Körper sinkt von der grösten Höhe, die er erreicht hatte, wieder gegen AH, bis er endlich in eben der Zeit, da er die grösste Höhe erreicht hatte, wieder in der Horizontallinie AH anlangt. Daher ist die ganze Zeit der Bewegung durch AMH $= \frac{h \sin\alpha}{g}$

$\frac{h \sin\alpha}{g}$, und die gröste Höhe des Wurfs EG = $\frac{hh \sin\alpha^2}{4g}$ (40 §.).

72 §.

Die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers, nebst der Richtung der Bewegung, in dem Punct *M* seiner Bahn, für jede gegebene Zeit *t* zu finden.

142 Fig. Aufl. In M ist die Geschwindigkeit, nach der horizontalen Richtung $Mc = h \cos\alpha$; und nach der verticalen Richtung $Md = h \sin\alpha - 2gt$. Also die aus beyden zusammengesetzte Geschwindigkeit, nach der Richtung $Mt = r(hh - 4ght \sin\alpha + 4ggtt)$ und diese Richtung schneidet die Horizontallinie, unter einem Winkel, dessen Tangente $= \frac{h \sin\alpha - 2gt}{h \cos\alpha}$

$= tang\alpha - \frac{2gt}{h \cos\alpha}$.

Für $t = \frac{h \sin\alpha}{g}$, wird diese Geschwindigkeit = *h*, wie im Anfange der Bewegung, und die Tangente ihres Winkels mit der Horizontallinie $= tang\alpha - \frac{2 \sin\alpha}{\cos\alpha} = -tang\alpha$. Also ist dieser Winkel bey H demjenigen gleich, unter welchem der Körper aufwärts geworfen worden; nur ist er ihm entgegengesetzt: er kehrt nemlich die hole Seite gegen A.

73 §.

142 Fig. Die Weite des Wurfs auf der Horizontalfläche *AH* zu finden. Aufl.

Aufl. Man setze AP $= x$, PM $= y$: so ist $x = ht \cos\alpha$, und $y = ht \sin\alpha - gtt$. Aus diesen Gleichungen schaffe man t weg: so erhält man $t = \frac{x}{h\cos\alpha}$ und $y = x\,tang\alpha - \frac{gxx}{hh\cos\alpha^2}$. Wenn nun der Körper in H angelangt ist: so ist $y = 0$. Wenn nemlich P in H genommen wird; so fällt M auch in H. Setzt man aber $y = 0$: so giebt dies zweene Werthe für x, nemlich $x = 0$, weil im Anfange der Bewegung auch $y = 0$ war; und zweytens $x = \frac{hh\,tang\alpha\cos\alpha^2}{g} = \frac{hh\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{hh\sin 2\alpha}{2g}$ $= AH$.

Eben dies würde man finden, wenn man in die Gleichung $t = \frac{x}{h\cos\alpha}$ den Werth $t = \frac{h\sin\alpha}{g}$ setzt. Dies giebt $\frac{x}{h\cos\alpha} = \frac{h\sin\alpha}{g}$, woraus eben der Werth von x folgt.

74 §.

Diese und die übrigen bisher erklärten Gesetze von der Bewegung schwerer Körper hat zuerst Galiläus in seinen Dialogis de motu, vorgetragen, und sie sind in der Ausübung von einem sehr allgemeinen Nutzen. Obgleich bisher bey den Bewegungen geworfener Körper ihre Massen nur als Puncte sind betrachtet worden: so gelten dennoch alle erwiesene Sätze wenigstens alsdenn, wenn die mittlere Richtung des ersten Stosses durch des Körpers Schwerpunct gehet, von jedem Körper, was er auch für

eine Gestalt und Grösse haben mag. In diesem Fall wird einem jeden Punct des Körpers durch den ersten Stoß die Geschwindigkeit h mitgetheilt, also einem jeden Punct nach der horizontalen und verticalen Richtung die Geschwindigkeiten $h \cos\alpha$ und $h \sin\alpha$. Ueberdem ist die Verzögerung der Schwere nach der verticalen Richtung für jeden Punct einerley, und jeder Punct bewegt sich so, wie sich der Schwerpunct bewegen würde, wenn in ihm die ganze Masse vereinigt wäre. Es sind in jedem Augenblick die Geschwindigkeiten aller Puncte gleich groß, und ihre Richtungen parallel.

§. 75

In der That ist die bisher in dem 61-73 §. betrachtete Bewegung schwerer Körper, nur ein besondrer Fall von der folgenden allgemeinen Aufgabe.

Alle Puncte einer Masse M werden beständig nach parallelen Richtungen von unveränderlichen Kräften getrieben, die den Massen dieser Puncte proportional sind, und deren Summe $= P$ ist: überdem ist allen Puncten dieser Masse nach einerley Richtung, welche die Richtung der Kräfte unter einem gewissen Winkel schneidet, die Geschwindigkeit h mitgetheilt worden: man soll die Bewegung des Körpers bestimmen.

142 Fig.

Die mittlere Richtung aller Kräfte wird auch in diesem Fall durch den Schwerpunct gehen; wenn also A dieser Schwerpunct, AD die mittlere Richtung der Kräfte, und AB die Richtung der Geschwindigkeit h, endlich AH auf AD senkrecht, und $BAH = 90° - BAD = \alpha$ ist: so hat man für die Bewegung des Schwerpuncts die auch hier mit der Bewegung

wegung aller übrigen Puncte einerley ist, die Gleichungen $x = ht \cos\alpha$, und $y = ht \sin\alpha - \frac{gP}{M}tt$,

(56 §). Folglich bleiben alle übrigen Schlüsse, bis zum 73 §. auch in dieser Allgemeinheit richtig, dafern man nur allenthalben in den herausgebrachten Formeln $\frac{gP}{M}$ statt g setzt.

76 §.

Indessen ist noch anzumerken, daß bey dieser Untersuchung keine andre bewegende Kraft sey in Betracht gezogen worden, als allein die Schwere; oder überhaupt die ihr ähnliche Kraft P. Wenn aber schwere Körper auf der Oberfläche unsrer Erde fortgeworfen werden: so müssen sie ihre Bewegung in der Luft fortsetzen. Diese widerstehet der Bewegung und vermindert in jedem Augenblick die Geschwindigkeit. Es ist dieser Widerstand bey kleinen, und dabey sehr schweren Körpern, die mit geringer Geschwindigkeit fortgehen, nur gering; er beträgt aber sehr viel bey schnellen Bewegungen, und etwas grossen Massen. Deswegen kan der Erfolg mit der bisherigen Theorie nicht übereinstimmen, wenn Körper von beträchtlicher Grösse sich sehr schnell durch die Luft bewegen, wie denn dieser Fall bey den Bomben und Kanonkugeln zutrift. Man hat indessen diese Theorie in der Artillerie so lange gebraucht, als man den Widerstand der Luft noch nicht kannte, und es wird nicht undienlich seyn, auf diese Bewegung der Geschützkugeln eine vorläufige Anwendung zu machen, damit der Nutzen dieser Lehren desto mehr in die Augen falle. Man setzt hiebey voraus, daß die

mittlere Richtung des Stosses, welchen die Gewalt des Pulvers der Kugel mittheilt, durch ihren Schwerpunct gehe, und in einer verticalen Ebene liege.

77 §.

Die Geschwindigkeit zu finden, welche eine gegebene Ladung Pulver einer Kugel von bestimmter Grösse und Schwere mittheilt.

Aufl. Es ist $AH = \frac{hh \sin 2\alpha}{2g}$ (73 §.), also $h = r\frac{2g \cdot AH}{\sin 2\alpha}$. Man versuche also durch einen Probe-Schuß, wie weit die gegebene Pulverladung die Kugel auf einer horizontalen Ebene treibt. Hat man diese Weite genau abgemessen: so setze man sie $= AH$, und es wird die gefundene Gleichung h bestimmen.

Die der Geschwindigkeit h zugehörige Höhe ist $= \frac{hh}{4g}$. Setzt man diese $= k$: so wird $\frac{hh}{2g} = 2k$ und $AH = 2k \sin 2\alpha$. Wenn nun $AH = k$ seyn soll: so muß $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, also $2\alpha = 30°$ (421 §. G) und $\alpha = 15°$ seyn. Also erwählt man am bequemsten diesen Erhöhungs-Winkel für den Probeschuß.

78 §.

Es ist die Entfernung *AH* gegeben; man soll den Ort *AH* mit einer bekannten Pulverladung treffen: wie groß muß der Erhöhungswinkel α seyn?

Aufl. Der Probeschuß in der Erhöhung von 15° treibe die Kugel auf die horizontale Weite k; so

ist

ist $k = \frac{hh}{4g}$ (77 §). Nun wird für die Erhöhung α, die Weite $AH = 2k \sin 2\alpha$, folglich $\sin 2\alpha = \frac{AH}{2k}$.

Weil in der Gleichung $AH = 2k \sin 2\alpha$, sich k nicht ändert, wenn gleich α verändert wird, und einerley Pulverladung und Kugel bleibt: so verhalten sich die Schußweiten bey verschiedenen Erhöhungswinkeln, und einerley Geschütz und Pulverladung, wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel.

Die Schußweiten werden also desto geösser, je grösser der Erhöhungswinkel α genommen wird, aber nur so lange, als $\alpha < 45°$ ist. Für $\alpha = 45°$ ist die Schußweite am grösten, weil nun $\sin 2\alpha = 1$. Hierauf aber nehmen die Schußweiten bey grössern Erhöhungen in umgekehrter Ordnung wieder ab. Wenn nemlich $\alpha > 45°$ ist, so wird $2\alpha > 90°$, da dann bis zu $180°$, also bis $\alpha = 90°$ wird, die Sinus abnehmen.

Weil nun $\sin 2\alpha = \sin(180° - 2\alpha)$, so giebts zwo Erhöhungen, α und $90° - \alpha$, unter welchen die Schußweiten gleich groß sind, und die gröste Schußweite für $\alpha = 45°$, wird $= 2K$. Sie ist demnach so groß, als die doppelte Weite des Probeschusses, in der Erhöhung von $15°$.

79 §.

Es ist die lothrechte Höhe *MP* eines Orts *M* über die Horizontallinie *AH* gegeben, und die Entfernung *AP* gleichfalls: wie groß muß der Erhöhungswinkel seyn, wenn man *M* treffen will? 142 Fig.

Aufl. Es sey MP $= a$, und AP $= b$. Wenn demnach $y = a$ ist, so muß $x = b$ seyn. Nun ist überhaupt $y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{gxx}{hh \cos\alpha^2}$ (73 §); setzt man also in diese Gleichung die gegebenen Werthe statt x und y: so erhält man $a = b \operatorname{tang}\alpha - \frac{gbb}{hh \cos\alpha^2}$.

Wenn nun $\frac{hh}{4g} = k$ (77 §) durch den Probeschuß bekannt ist, so hat man $\frac{g}{hh} = \frac{1}{4k}$, und $a = b \operatorname{tang}\alpha - \frac{bb}{4k \cos\alpha^2}$; oder wenn man $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$ (420 §. G.) setzt: so wird $a = b \operatorname{tang}\alpha - \frac{bb \sec\alpha^2}{4k}$, und $4ak = 4bk \operatorname{tang}\alpha - bb(1 + \operatorname{tg}\alpha^2)$. Dies geordnet, giebt $\operatorname{tg}\alpha^2 - \frac{4k}{b} \operatorname{tg}\alpha = -\frac{4ak + bb}{bb}$, woraus ferner $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2k}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(4k(k - a) - bb)}$ geschlossen wird.

Wenn $a = 0$ ist: so hat man den Fall, da M im Horizont liegt, und dies giebt $\operatorname{tang}\alpha = \frac{2k}{b} \pm \frac{1}{b}$ $\sqrt{(4kk - bb)} = \frac{1}{b}(2k \pm \sqrt{(4kk - bb)})$ da dann diese Auflösung mit derjenigen überein kommt, die im 78 §. gefunden worden. Es ist nemlich $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha^2}$ (456 §. G.). Im gegenwärtigen

Fall

Fall aber $2\,\text{tang}\alpha = \frac{2}{b}(2k \pm \sqrt{(4kk - bb)})$ und

$1 + \text{tang}\alpha^2 = \frac{4k}{bb}(2k \pm \sqrt{(4kk - bb)})$. Also

wird $\sin 2\alpha = \frac{2}{b} : \frac{4k}{bb} = \frac{b}{2k}$, wie im 78 §,

wo nun $AH = b$ ist.

Wollte man einen Punct N treffen, der tiefer, als die Horizontallinie AH liegt: so sey seine Tiefe $QN = -a$. Die senkrechten Linien unter AH sind nemlich denen, die darüber stehen, entgegengesetzt. Ist nun auch $AQ = b$ bekannt; so darf man nur in dem gefundenen Ausdruck für $\text{tang}\alpha$, nun $-a$ statt $+a$ schreiben, und man erhält $\text{tang}\alpha = \frac{2k}{b} \pm \frac{1}{b}\sqrt{(4k(k+a) - bb)}$.

80 §.

Wenn die Richtung des Schusses horizontal ist, 143
so fällt AB in AH, und es ist $\alpha = 0$. Weil nun Fig.
überhaupt $AP = x = ht\cos\alpha$, und $PM = y = ht\sin\alpha - gtt$: so ist im gegenwärtigen Fall $x = ht$, und $y = -gtt$, wo y negativ ist, weil diese Linie allemahl unter der Horizontallinie liegt. Ein schwerer Körper läst sich also nach der horizontalen Richtung nicht so werfen, daß derselbe diese Bewegung nach der horizontalen Richtung eine Zeitlang fortsetzte. Die Schwere treibt ihn jeden Augenblick unterwärts, und sein Weg krümmt sich immer mehr von der horizontalen Richtung weg. Indessen sind im Anfange der Bewegung die Tiefen pm, qn sehr klein, wenn die erste Geschwindigkeit h sehr groß ist. Wieviel

dies bey einer gegebenen Entfernung $Ap = x$ austrage, kan man so finden, wenn h bekannt ist. Man setze $t = \frac{x}{h}$: so wird $y = -\frac{gxx}{hh}$. Wenn also z. E. eine Musketenkugel mit einer Geschwindigkeit von 800 Fuß in einer Secunde horizontal geschossen wird, und man nimmt $x = 150$ Fuß; so wird $pm = \frac{15,625 \times 225}{6400} = 0,549$ Fuß. Demnach beträgt diese Sinkung auf 150 Fuß nur wenig über einen halben Fuß.

Wenn QM die Horizontalfläche des Erdbodens, und eine Canone um die Höhe AQ über dieselbe erhaben ist, so wird die Schußweite $AP = QM$ folgender massen gefunden. In die Gleichung $y = \frac{gxx}{hh}$ setzt man $y = AQ$, so erhält man $xx = \frac{hh \cdot AQ}{g}$, also $x = h\sqrt{\frac{AQ}{g}} = QM$.

81 §.

Die hier gebrauchte Methode, die Umstände der Bewegung eines geworfenen schweren Körpers zu finden, verdienet eine genauere Erörterung. Sie ist ein Muster, wie man in allen ähnlichen Fällen verfahren muß, wenn auf einen bewegten Punct eine Kraft nach einer Richtung würkt, die nicht mit der Richtung der Bewegung dieses Puncts einerley ist. Die Kraft ändert alsdenn nicht allein die Geschwindigkeit, sondern zugleich die Richtung des bewegten Puncts. Die allgemeine Untersuchung hierüber setzt zwar mehr Theorie voraus, als bisher in den beyden

beyden ersten Theilen dieses Lehrbegrifs ist ausgeführt worden. Indessen kommt das meiste nur darauf an, daß man einigermassen wisse, wie sich die Haupteigenschaft einer krummen Linie durch eine Gleichung ausdrücken lasse, und wie man daraus ihre übrigen Eigenschaften herleiten könne. Die allgemeine Brauchbarkeit dieser Theorie wird mich rechtfertigen, wenn ich hier schon in wenigen folgenden Absätzen die ersten Gründe davon vortrage.

Wenn alle Grössen, die in einer Gleichung vorkommen, ihre bestimmten Werthe haben, nur zwo ausgenommen, wie x und y in der Gleichung des 73 §; so drückt diese Gleichung aus, wie die eine dieser Grössen y von der andern x abhänge, und wie groß die eine y seyn müsse, wenn für die andre x ein bestimmter Werth gegeben, oder willkührlich angenommen wird. Bedeutet nun x ein Stück AP, das auf einer graden Linie AH von einem bekannten Punct A angerechnet, abgeschnitten wird, und y eine durch den äussersten Punct P dieses abgeschnittenen Theils gezogene senkrechte Linie PM: so bestimmen beyde Werthe von x und y den Ort eines Puncts M der von den Schenkeln des rechten Winkels DAB um die Entfernungen AP = RM und PM = AR, abstehet (10 §). Auf der Ebene des Winkels DAB sey eine Linie AMN verzeichnet, die übrigens grade oder krumm seyn kan, wie man will: so wird jeder Punct M in dieser Linie gegen die beyden Schenkel des rechten Winkels DAH seine besondre Lage haben, die sich eben so, wie im 10ten §. durch den Abstand von den beyden Schenkeln AF und AH, des rechten Winkels, bestimmen läst. Kennet man nun für jeden Punct M dieser Linie die beyden Entfernungen

142 Fig.

AP

AP und PM: so kennet man die Gestalt derselben. Eigentlich darf man nur wissen, wie groß PM für jedes abgeschnittene Stück AP genommen werden müsse: so ist man im Stande so viel Puncte, die alle in dieser Linie liegen, als man will, zu finden. Dies weiß man aber, wenn man eine Gleichung zwischen PM und AP hat, worin ausser diesen beyden Grössen alle übrige ihre bestimmten Werthe haben. Daher drückt eine solche Gleichung die Natur der Linie AMN aus; sie zeigt, wie groß PM für jeden Abstand von AP genommen werden müsse, damit M in dieser Linie liege.

82 §.

142 Fig. Die beyden graden Linien AH und AF, die sich in dem bekannten Puncte A schneiden, und welche dazu dienen, die Lage eines jeden Puncts der Linie AMN zu bestimmen, nennt man ihre Axen. Die Stücke AP, welche auf der einen Axe willkührlich abgeschnitten werden, heissen die Abscissen, und A der Anfangspunct der Abscissen. Die zugehörigen Abstände PM aber werden Applicaten auch Ordinaten der Linie AMN genannt. Beyde, eine Abscisse mit ihrer zugehörigen Ordinate, heissen Coordinaten. Um beyde Axen zu unterscheiden, kan man diejenige, worauf die Abscissen genommen werden, die Axe der Abscissen, auch die Abscissenlinie, nennen. Die andre Axe aber, womit die Ordinaten parallel sind, die Axe der Ordinaten. Es ist eigentlich nicht nothwendig, daß beyde Axen auf einander senkrecht stehen, wie aus dem 13 §. erhellet. Schneiden sie einander unter einem schiefen Winkel: so hat man schiefwinklichte Coordinaten,

ten, die sich unter eben dem Winkel schneiden. Wenn aber beyde Axen auf einander senkrecht sind: so hat man rechtwinklichte Coordinaten. Das letzte wird hier allemahl angenommen werden, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird.

Wenn eine Linie, wie AMN bereits auf einer Ebene verzeichnet ist, und man kennet wenigstens einige Haupteigenschaften dieser Linie; so hat es in den wenigsten Fällen sonderliche Schwürigkeit, eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten zu finden, welche die Natur dieser Linie ausdrückt, nur muß die Lage der Axen bekannt seyn.

83 §.

Es ist der Halbmesser r eines Kreises $AEBD$ gegeben; man soll eine Gleichung für den Kreis finden, wenn die Axen AB, ED sich im Mittelpuncte C senkrecht schneiden. 144 Fig.

Aufl. Es sey $CP = x$, $PM = y$. Man ziehe CM: so hat man $CM^2 = CP^2 + PM^2$ (111 §. G). oder $rr = xx + yy$, folglich $yy = rr - xx$, und $y = \pm \sqrt{(rr - xx)}$.

Die Applicate y bekömmt hier zweene entgegengesetzte, übrigens aber gleiche Werthe, weil MP unterwärts verlängert, den Kreis nochmahl in N trift, und es für den Abstand CP vom Mittelpunct, zweene Puncte M und N im Kreise giebt, die von der Abscissenlinie auf beyden Seiten gleich weit entfernt sind.

Soll der äusserste Punct A des Durchmessers AB der Anfangspunct der Abscissen, also $AP = x$ seyn, und $PM = y$ bleiben: so hat man $PM^2 = AP \times PB$ (214 §. G.) $= AP(BA - AP)$, also $yy = x(2r - x)$ oder $yy = 2rx - xx$, und $y = \pm \sqrt{(2rx - xx)}$.

84 §.

84 §.

145 Fig. **Es ist der Winkel $MCB = \alpha$ gegeben, unter welchen die grade Linie MN die Axe der Abscissen AB schneider, und der Durchschnittspunct C soll der Anfangspunct der Abscissen seyn: man sucht eine Gleichung für die grade Linie MN.**

Aufl. Wenn $CP = x$, $PM = y$ gesetzt wird: so hat man $\text{tang}\,\alpha = \frac{y}{x}$ also $y = x\,\text{tang}\,\alpha$.

Soll ein andrer Punct A der vom Durchschnittspunct C verschieden, und von ihm um den Abstand $CA = a$, entfernt ist, der Anfangspunct der Abscissen, also $AP = x$, $PM = y$ seyn: so hat man wie vorhin zwar $\text{tang}\,\alpha = \frac{PM}{CP}$, also $PM = CP\,\text{tang}\,\alpha$. Weil aber $CP = CA + AP$, und jetzt $AP = x$, $AC = a$ ist: so wird $y = (a + x)\,\text{tang}\,\alpha$ oder $y = a\,\text{tang}\,\alpha + x\,\text{tang}\,\alpha$.

Fiele A auf der andern Seite von C in a, und setzte man $aP = x$, und $Ca = a$: so wäre $y = x\,\text{tang}\,\alpha - a\,\text{tang}\,\alpha$. Es hat jetzt a eine Lage, die der vorigen entgegengesetzt ist, und man darf nur in der letzten Gleichung $-a$ statt $+a$ setzen.

Wenn BF auf AB senkrecht ist; so ist auch $\frac{BF}{BC} = \text{tang}\,\alpha = \frac{PM}{CP}$, also $PM = \frac{BF}{BC}\,CP$, oder $y = \frac{BF}{BC}\,x$. Es folgt hieraus umgekehrt, wenn man BF auf CB senkrecht setzt, und $BF = \frac{PM.BC}{CP}$ nimmt, daß F mit C und M in grader

Linie

Linie liege. Denn dafern BF von CM in G geschnitten würde: so wäre $BG = \frac{PM.BC}{CP} = BF$, welches nicht seyn kan, dafern nicht G in F fällt.

85 §.

Die unbestimmten Gleichungen zwischen zwoen veränderlichen Grössen, rechnet man auf ähnliche Art, wie die bestimmten Gleichungen (175 §. A. R.) zu verschiedenen Ordnungen, und zwar eine jede insbesondre zu derjenigen Ordnung, welche die höchste Potenz der einen, oder der andern veränderlichen Grösse; oder auch das höchste Product zweyer Potenzen dieser veränderlichen Grössen in einander, anzeigt. Hier nemlich kommt die Anzahl der Dimensionen beyder veränderlichen Grössen zusammen in Betrachtung. Jede veränderliche Grösse hat eine Dimension; jede Potenz derselben so viele Dimensionen, als der Exponent der Potenz anzeigt, und ein Product zwoer, oder mehrer solcher Potenzen, so viele Dimensionen, als die Summe der Exponenten der Factoren anzeigt. So hat

axy zwo,
ffx^3y^2 fünf,
$a^k x^m y^n$ aber $m + n$ Dimensionen.

Die Abmessungen der beständigen Grössen kommen gar nicht in Betrachtung. Will man nun beurtheilen, zu welcher Ordnung eine unbestimmte Gleichung gehöre: so müssen alle Wurzelzeichen daraus zuförderst weggeschaft werden, wie im 196 §. A. R. Demnach gehören die Gleichungen für den Kreis (83 §) zur zwoten Ordnung, die Gleichungen für die grade Linie aber (84 §.) zur ersten Ordnung.

86 §.

Wenn eine Gleichung zwischen zwoen veränderlichen Grössen, welche die Natur einer gewissen Linie für rechtwinklichte Coordinaten ausdrücken soll, nebst der Abscissenlinie und dem Anfangspuncte der Abscissen, gegeben ist: so kan man aus der Gleichung alle Eigenschaften dieser Linie herleiten. Man kan, wie schon im vorhergehenden angeführt ist, so viele Puncte, als man will, suchen, durch welche die Linie durchgehen muß. Aber auch ohne daß man sich diese Mühe giebt, kan man durch Schlüsse aus der Gleichung die Gestalt der Linie kennen lernen, wie sie aussehen müste, wenn man sie würklich auf einer Ebene verzeichnen wollte. Ein Beyspiel davon soll die Gleichung $y = \pm\sqrt{(2rx - xx)}$ seyn.

87 §.

144 Fig. Allemahl, wenn $y = 0$ ist, fällt M in die Abscissenlinie, und die gesuchte Linie schneidet die Axe; denn M fällt nun in P, und P ist allemahl in der Abscissenlinie. Man setze also $y = 0$, und suche die zugehörigen Werthe von x: so erhält man $xx - 2rx = 0$. Dies giebt zweene Werthe von x, nemlich $x = 0$, und $x = 2r$. Demnach schneidet die Linie, der die Gleichung $yy = 2rx - xx$ zugehört, ihre Abscissenlinie zweymahl, einmahl wenn P in A fällt, also in A selbst: das zweyte mahl wenn P in B fällt, und $AB = 2r$ ist, also in der Entfernung $AB = 2r$ vom Anfangspunct der Abscissen.

Die Applicate y hat allemahl zweene mögliche Werthe, so lange $xx < 2rx$, also $x < 2r$ ist. Daher erstreckt sich die Linie von A aus auf beyden Seiten der Axe. Wenn aber $x > 2r$, also $xx > 2rx$ wird:

wird: so sind allemahl beyde Ordinaten unmöglich. Also kan eine senkrechte Linie durch L, wenn AL > AB ist, die gesuchte Linie gar nicht schneiden, und daraus folgt, daß es in Entfernungen von FG, die grösser als AB sind, gar keine Puncte dieser Linie weiter gebe.

Wenn x negativ ist: so wird $y = \pm\sqrt{(-2rx - xx)}$ allemahl unmöglich. Also giebt es auf der Seite von FG, wo K liegt, ebenfalls gar keine Puncte, die zur gesuchten Linie gehören; und daraus folgt, daß die Linie einen Theil der Ebene, worauf sie liegt, von allen Seiten einschliesse, und daß dieser ganz zwischen den Parallelen FG und HI enthalten sey.

88 §.

Die Gleichung $y = \pm\sqrt{(2rx - xx)}$ ergiebt ferner, daß $y = \pm r$ sey, wenn $x = r = \frac{1}{2}$AB ist. Halbirt man also AB bey C, ziehet CD auf AB senkrecht, und macht CD = CE = CA: so geht die Linie durch D und E. Es sey nun CP = e, und man setze x = AC + CP = AP = $r + e$: so erhält man $y = \pm\sqrt{(rr - ee)}$; also sind beyde y kleiner, als r, und nehmen ab, wenn e wächst. Nimmt man P auf der andern Seite von C in p, so daß Cp = e ist, und setzt x = AC − Cp = Ap = $r - e$: so wird wiederum $y = \pm\sqrt{(rr - ee)}$, und beyde y kleiner, als r, so wie auch beyde y abnehmen, wenn p gegen A rückt, und Cp grösser, also Ap kleiner wird. Demnach ist die gesuchte Linie bey D und E am weitesten von der Abscissenlinie entfernt, und die beyden Ordinaten durch C sind unter allen die grösten.

Wenn man nun auch nicht aus dem 83 §. schon wüste, daß diese Linie der Kreis sey, so würde es

die Gleichung $y = \pm\sqrt{(rr - ee)}$ oder $yy = rr - ee$ unmittelbar zeigen. Sie giebt $yy + ee = rr$, und $\pm\sqrt{(yy + ee)} = r$. Es ist aber $CM = \sqrt{(yy+ee)}$; also sind alle Puncte dieser Linie von C gleich weit entfernt, und dies ist die bekannte Haupteigenschaft des Kreises.

89 §.

Jede unbestimmte Gleichung der ersten Ordnung gehört für eine grade Linie.

Bew. Wenn x und y die Coordinaten sind: so kan eine solche Gleichung nur dreyerley Arten von Gliedern enthalten, nemlich Producte beständiger Grössen in x, oder in y, oder ganz beständige Glieder. Nun sey A die Summe aller Coefficienten von x, B die Summe aller Coefficienten von y, und C die Summe aller beständigen Glieder: so wird eine solche Gleichung allemahl unter diesem allgemeinen Ausdrucke begriffen seyn: $Ax + By = C$ (184 §. A. R. 3 Aufl.). Es sey AB die Abscissenlinie, und B der Anfangspunct der Abscissen. Wenn nun $x = 0$ ist, so wird $y = \frac{C}{B}$. Setzt man also $BF = \frac{C}{B}$ auf AB senkrecht; so liegt F in der Linie, welche die Gleichung $Ax + By = C$ ausdrückt. Wenn ferner $y = 0$ ist: so wird $x = \frac{C}{A}$. Wird also $BC = \frac{C}{A}$ genommen; so ist C gleichfalls in der Linie, welche die Gleichung der ersten Ordnung ausdrückt. Ist nun M ein dritter Punct in eben der Linie, und man setzt MP auf AB senkrecht: so ist $BP = x$, $PM = y$.

145 Fig.

Weil nun $\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y = 1$ ist: so setze man statt $\frac{C}{A}$

und

und $\frac{C}{B}$ die gefundenen Werthe, und man erhält

$\frac{x}{BC} + \frac{y}{BF} = 1$, oder $\frac{BF}{BC} x + y = BF$, folglich $y = BF - \frac{BF}{BC} x$, oder $PM = BF - \frac{BF}{BC} BP$.

Es ist aber $BP = BC - CP$; also wird $PM = \frac{BF : CP}{BC}$, und $BC : BF = CP : PM$; folglich liegt jeder Punct M mit F und C in grader Linie (84 §).

90 §.

Wenn man die Gleichung für eine gewisse Linie hat, bey einer gegebenen Axe und Anfangspunct der Abscissen; so kan man daraus sehr viele andre Gleichungen für eben die Linie herleiten, wenn man statt der vorigen Axe eine andre annimmt, und die Abscissen von einem andern Puncte an rechnet.

Die Gestalt der Linie, welche die Gleichung $y = x \text{ tang} \alpha - \frac{gxx}{hh \cos \alpha^2}$, ausdrückt, kennet man schon aus dem 69. u. f. §§. und sie soll hier zum Beyspiel dienen. Es war $AH = \frac{hh \sin 2\alpha}{2g}$ (73 §). Man halbire AH bey E: so wird $AE = \frac{hh \sin 2\alpha}{4g}$. Man nehme nun E für den Anfangspunct der Abscissen, und setze $x = AP = AE - EP = \frac{hh \sin 2\alpha}{4g} - EP$ in die Gleichung $y = x \text{ tang} \alpha - \frac{gxx}{hh \cos \alpha^2}$ 142 Fig.

so wird

$$x \operatorname{tang}\alpha = \frac{hh \operatorname{sin} 2\alpha \operatorname{tang}\alpha}{4g} - EP \operatorname{tang}\alpha$$

$$= \frac{hh \operatorname{sin}\alpha^2}{2g} - EP \operatorname{tang}\alpha, \text{ weil}$$

$\operatorname{sin} 2\alpha = 2 \operatorname{sin}\alpha \operatorname{cos}\alpha$. Ferner

$$xx = \frac{h^4 \operatorname{sin} 2\alpha^2}{16gg} - \frac{hh \operatorname{sin} 2\alpha}{2g} EP + EP^2,$$

$$\frac{g}{hh \operatorname{cos}\alpha^2} xx = \frac{hh \operatorname{sin} 2\alpha^2}{16g \operatorname{cos}\alpha^2} - \frac{\operatorname{sin} 2\alpha}{2 \operatorname{cos}\alpha^2} EP +$$

$$\frac{g}{hh \operatorname{cos}\alpha^2} EP^2 = \ldots \frac{hh \operatorname{sin}\alpha^2}{4g} - EP \operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{hh \operatorname{cos}\alpha^2} EP^2.$$

Demnach wird $y = \frac{hh \operatorname{sin}\alpha^2}{4g} - \frac{g}{hh \operatorname{cos}\alpha^2} EP^2$

Es sey Mp auf GE senkrecht, so ist $y = PM = Ep$, und $EP = pM$, folglich $Ep = \frac{hh \operatorname{sin}\alpha^2}{4g} -$

$\frac{g}{hh \operatorname{cos}\alpha^2} pM^2$. Endlich war $EG = \frac{hh \operatorname{sin}\alpha^2}{4g}$ (71 §). Wenn man also $Ep = EG - Gp =$

$\frac{hh \operatorname{sin}\alpha^2}{4g} - Gp$, setzt, so erhält man $Gp =$

$\frac{g}{hh \operatorname{cos}\alpha^2} pM^2$, oder $pM^2 = \frac{hh \operatorname{cos}\alpha^2}{g} Gp$.

Soll demnach nunmehro $Gp = x$, $pM = y$ seyn; so ist $yy = \frac{hh \operatorname{cos}\alpha^2}{g} x$, oder $yy = 4k \operatorname{cos}\alpha^2 . x$, wenn $\frac{hh}{4g}$, wie im 77 §, $= k$ gesetzt wird; folglich $y =$

$\pm \sqrt{4k \operatorname{cos}\alpha^2 . x}$.

91 §.

Diese letzte Gleichung ergiebt, daß nunmehro y allemahl zweene gleiche und entgegengesetzte Werthe habe, so lange $x = Gp$ positiv ist, und daß diese Werthe mit x ohne Aufhören wachsen. Demnach erstrecken sich die beyden Aeste GA und GH auf beyden Seiten der Axe GE ohne Aufhören fort, und die Axe GE halbirt alle Sehnen, die auf ihr senkrecht stehen; daraus dann leicht erhellet, daß jede zweene Bogen, wie GA und GH, einander gleich und ähnlich seyn. Man nennt deswegen GE die Hauptaxe dieser Linie, und G heist ihr Scheitel. Die Gleichung $y = \pm\sqrt{4k\cos\alpha^2}.x$ zeigt, daß jede Ordinate pM die mittlere Proportionallinie sey, zwischen der, vom Scheitel auf der Hauptaxe genommenen Abscisse, und der beständigen Linie $4k\cos\alpha^2$. Für negative x sind die Ordinaten allemahl unmöglich. Wenn man also durch G die Axe der Ordinaten zieht: so fällt die Linie ganz auf der Seite derselben, wo die positiven Abscissen liegen. 142 Fig.

Wenn die Sehne $nv = 4k\cos\alpha^2$ ist: so ist die Applicate $fn = y = \frac{1}{2}nv = 2k\cos\alpha^2$. Man setze diesen Werth statt y, so wird $4kk\cos\alpha^4 = 4k\cos\alpha^2.x$, und $x = k\cos\alpha^2$. Man nehme demnach $Gf = k\cos\alpha^2$: so wird die Sehne $nv = 4k\cos\alpha^2$, und wenn man diese $= A$ setzt: so hat man $yy = Ax$, und $Gf = \frac{1}{4}A$. Es giebt also eine auf der Hauptaxe senkrechte Sehne, welcher die dritte Proportionallinie zu jeder Abscisse, und der zugehörigen Applicate allemahl gleich ist; und diese ist vom Scheitel der Hauptaxe um ihren vierten Theil entfernt.

92 §.

Es sey ABC ein grader Kegel, BC seine Grundfläche, und ABC ein Schnitt durch seine Axe AD. 146 Fig.

Wenn man nun durch einen Punct G, der Seite AB des Kegels, eine Ebene MG*m* legt, die auf der Ebene ABC senkrecht, und mit der gegenüberstehenden Seite AC des Kegels parallel ist; so heist die Linie MG*m*, worin diese Ebene die Kegelfläche schneidet, eine Parabel, und der Punct G ihr Scheitel; die Durchschnittslinie GE aber, ihrer Ebene mit der auf ihr senkrechten Ebene durch des Kegels Axe, ihre Zwergaxe.

93 §.

146 Fig. Die Seite *AB* des Kegels ist, nebst dem Durchmesser *BC* der Grundfläche, und der Entfernung *AG* des Scheitels *G* der Parabel vom Scheitel *A* des Kegels gegeben: man soll die Gleichung für die Parabel finden, wenn die Abscissen auf der Zwergaxe vom Scheitel gerechnet werden, und die Applicaten, wie hier allemahl vorausgesetzt wird, auf der Abscissenlinie senkrecht sind.

Aufl. Es sey M*p* auf GE senkrecht, und $Gp = x$, $pM = y$: so ist *p*M auf der Ebene ABC senkrecht (318 §. G.). Durch *p*M lege man eine Ebene RMS mit der Grundfläche BC parallel, so steht diese auf ABC senkrecht (315 §. G.) ihr Schnitt RMS*m* mit der Kegelfläche ist ein Kreis (367 §. G.) und daher $pM^2 = Rp \times pS$ (214 §. G.) Nun sey GH mit BC parallel, so ist $GH = pS$, und $pM^2 = GH . Rp$. Weiter ist AH oder AG:GH = G*p*:R*p*, also $Rp = \frac{GH . Gp}{AG}$, und $pM^2 = \frac{GH^2}{AG} Gp$, oder $yy = \frac{GH^2}{AG} x$. Weil nun $\frac{GH}{AG} = \frac{BC}{AB}$, und GH =

$= \frac{BC}{AB} AG$; so hat man $yy = \frac{BC^2 . AG}{AB^2} x$, oder $yy = px$, wenn man $\frac{BC^2}{AB^2} AG = p$ setzt.

94 §.

Demnach hat die Parabel die Eigenschaft, daß die dritte Proportionallinie zur Abscisse und Applicate allemahl einer beständigen Linie p gleich ist, nemlich der vierten Proportionallinie zum Quadrate der Seite des Kegels, dem Quadrat des Durchmessers der Grundfläche, und dem Abstande des Scheitels der Parabel von der Spitze des Kegels. Diese beständige Linie heist der Parameter der Parabel.

Dieser Parameter wird durch das Verhältniß der Seite des Kegels zum Durchmesser der Grundfläche, nebst dem Abstande der beyden Scheitel A und G, bestimmt. Die Seite des Kegels sey gegen die Grundfläche unter dem Winkel $ABC = \beta$ geneigt: so ist $BAD = 90° - \beta$, und $BAC = 180° - 2\beta$.

Also $\frac{BC}{AB} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = 2\cos\beta$, folglich der Parameter $p = 4\cos\beta^2 . AG$.

95 §.

Jede Gleichung, wie $yy = Ax$, gehört für eine Parabel, und A ist ihr Parameter.

Beweis. Man kan die Linie, der die Gleichung $yy = Ax$ zugehört, aus jedem senkrechten Kegel, wie im 93 §. schneiden. Es sey ABC dieser Kegel, der Winkel $ABC = \beta$, und AG der Abstand des Scheitels der Parabel vom Scheitel des Kegels: so

muß $A = 4 \cos\beta^2 . AG$, folglich $AG = \frac{A}{4\cos\beta^2}$ seyn. Wenn man also durch eine Seite des Kegels, in der Entfernung $\frac{A}{4\cos\beta^2}$ vom Scheitel, eine Ebene legt, die auf der Ebene durch die Axe, und diese Seite senkrecht stehet, und mit der entgegengesetzten Seite parallel ist, so ist die Durchschnittslinie mit der Kegelfläche diejenige Linie, der die Gleichung $yy = Ax$, zugehört.

96 §.

142 Fig. Demnach ist die Bahn geworfener schwerer Körper, die sich ohne alles sonstige Hinderniß frey fortbewegen, eine Parabel, und ihr Parameter $= 4k\cos\alpha^2$, wenn α der Erhöhungswinkel des Wurfs, und k die der ersten Geschwindigkeit zugehörige Höhe ist. Um sie aus einem Kegel, dessen Seiten gegen die Grundfläche, unter dem Winkel β geneigt sind, gehörig zu schneiden, setze man $4AG\cos\beta^2 = 4k\cos\alpha^2$; so wird $AG = \frac{k\cos\alpha^2}{\cos\beta^2}$ genommen werden müssen. Die gröste Höhe des Wurfs fällt in die Zwergaxe dieser Parabel, und der höchste Punct G, den der geworfene Körper erreicht, ist ihr Scheitel.

143 Fig. Für die Bahn des horizontal geworfenen Körpers, war die Gleichung zwischen AP und PM diese: $y = -\frac{gxx}{hh}$ (80 §). Man setze AD auf AP senkrecht, und MQ senkrecht auf AD: so wird $AQ = PM = y$, und $MQ = AP = x$; also $-AQ = -\frac{g}{hh} MQ^2$, und $MQ^2 = \frac{hh}{g} AQ = 4^k . AQ$.

Dem-

Demnach ist auch diese Bahn eine Parabel, die Verticallinie durch A ihre Zwergaxe, und ihr Parameter $= 4k$. Sie wird aus dem Kegel, wie vorhin geschnitten, wenn man $AG = \frac{k}{\cos\beta^2}$ nimmt. 146 Fig.

Der VI. Abschnitt.

Von den Kräften die nicht gleichförmig beschleunigen.

97 §.

Wenn eine Kraft P die Masse M zwar beständig nach einerley Richtung AB treibt; aber nicht, wie die Schwere allemahl einerley Grösse behält; sondern in jedem folgenden Zeitpunct stärker, oder schwächer, als in dem vorigen beschleuniget; so muß sie in der Rechnung selbst als eine veränderliche Grösse betrachtet werden, die von der Zeit t, der Grösse des Weges, den der Körper bereits zurückgeleget hat, oder andern Umständen abhängt. In solchen Fällen bleiben die im 56 §. gefundenen Gleichungen, allein nicht hinreichend, den Fortgang der Bewegung zu bestimmen; sondern man muß damit folgende Betrachtungen verbinden. 138 Fig.

98 §.

Es sey die Masse M in der Zeit t durch den Weg AP fortgegangen, und rücke in der folgenden sehr kleinen 138 Fig.

kleinen Zeit τ um das Stück $P\pi$ weiter. Dafern nun die Kraft in dem Augenblick, da die Masse M in P ankommt, überall aufhörte zu würken: so würde dennoch die Masse M einen Theil PQ dieses Weges mit der in P schon erlangten Geschwindigkeit gleichförmig durchlaufen haben, und es ist $Q\pi$ eigentlich der Weg, den die Masse wegen fortdaurender Würkung der Kraft, in der Zeit τ noch überdem zurücke legt. Wäre die Kraft P in der Zeit τ von eben der Grösse beständig geblieben, die sie am Ende der Zeit t hatte: so wäre die Masse M in dieser Zeit zwar weiter als Q bis p vorgerückt, und dann wäre $\frac{Qp}{\tau\tau}$ die Beschleunigung in dem Verstande des 44 und 45 §. Allein es ist Qp nicht mit $Q\pi$ einerley, weil sich P während der Zeit τ ändert. Dafern die Kraft P in der Zeit τ grösser geworden ist; so ist $Q\pi > Qp$. Wäre aber die Kraft P in der Zeit τ kleiner geworden; so wäre $Q\pi < Qp$. So wie nun bey der ungleichförmigen Bewegung durch die Geschwindigkeit des Körpers für einen gegebenen Zeitpunct derjenige Weg verstanden wird, den die Masse in der folgenden Secunde durchlaffen würde, wenn die Bewegung von jetzt an sich nicht weiter änderte, und von diesem Augenblick an der Körper blos vermöge seiner Trägheit fortginge: so verstehet man durch die Beschleunigung einer ungleichförmig würkenden oder veränderlichen Kraft P für einen gegebenen Zeitpunct denjenigen Weg, durch welchen die Masse in der folgenden Secunde weiter, als wegen der Trägheit allein fortrücken würde, wenn während dieser Zeitsecunde die Kraft *P* eben so groß bliebe, als sie im Anfange derselben

selben war. In diesem Verstande wäre also $\frac{Qp}{\tau\tau}$ die Beschleunigung der veränderlichen Kraft P, für den letzten Augenblick der Zeit t.

99 §.

Es ist eine Gleichung zwischen t und s gegeben, wenn s den Weg bedeutet, den die Masse M, die von der veränderlichen Kraft P, getrieben wird, in der Zeit t zurück legt: man soll die Geschwindigkeit der Masse M nebst der Beschleunigung der Kraft P für einen bestimmten Werth der Zeit t finden.

Aufl. Damit das allgemeine Verfahren, dessen man sich jedesmahl bedienen kan, desto deutlicher ins Licht gesetzt werden möge, soll davon zugleich die Anwendung auf einen besondern Fall gemacht werden. 138 Fig.

Es sey also $AP = s = at^3$, wenn AP der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist. In der nur sehr kleinen folgenden Zeit τ sey die Masse von P nach π gerückt: so wird

$$A\pi = a(t+\tau)^3 = a(t^3+3t^2\tau+3t\tau^2+\tau^3),$$

folglich $A\pi - AP = P\pi = a(3t^2\tau+3t\tau^2+\tau^3)$

und $\frac{P\pi}{\tau} = a(3t^2+3t\tau+\tau^2)$.

Nun sey in P die Geschwindigkeit $= c$. Wenn also PQ der Weg ist, den die Masse mit dieser Geschwindigkeit in der Zeit τ gleichförmig zurücklegen würde: so ist $c = \frac{PQ}{\tau}$, aber $PQ < P\pi$, also $c < \frac{P\pi}{\tau}$.

In π sey die Geschwindigkeit $= c'$: so ist $c' > c$. Hätte nun die Masse in P schon die Geschwindigkeit

c'

c' gehabt, und wäre in der Zeit τ von P nach q fortgegangen: so müste $Pq > P\pi$ seyn. Aber es wäre $c' = \frac{Pq}{\tau}$, also $c' > \frac{P\pi}{\tau}$. Zwischen diesen Gränzen c und c' ist also $\frac{P\pi}{\tau}$ allemahl enthalten, wie klein auch τ angenommen wird. Beyde Gränzen nähern sich einander desto mehr, je mehr τ abnimmt, und werden gleich groß, wenn τ verschwindet. In diesem Fall also muß $c = \frac{P\pi}{\tau}$ seyn, oder c ist die Gränze des Verhältnisses $\frac{P\pi}{\tau}$, womit beyde Glieder desselben verschwinden.

Wenn $AP = s = at^3$ ist, wie vorhin als ein Beyspiel die Sache zu erläutern, angenommen ward; so wird $\frac{P\pi}{\tau} = a(3t^2 + 3t\tau + \tau^2)$. Setzt man in diesem Ausdruck $\tau = 0$, so erhält man $\frac{P\pi}{\tau} = 3at^2 = c$.

Wenn nun P die Grösse der bewegenden Kraft für das Ende der Zeit t ausdrückt, und diese sich während der nun folgenden Zeit t ändert: so sey am Ende der Zeit τ, wenn die Masse in π ankommt, die bewegende Kraft $= P'$ und $P' > P$, so daß die Beschleunigung in der Zeit t wächst. Es sey Qp der Weg, durch welchen die Masse weiter, als PQ gienge, wenn die Kraft P sich während der Zeit τ nicht änderte, so ist $\frac{Qp}{\tau^2} = \frac{gP}{M}$ (93 §.). Aber

$Qp <$

$Qp < Q\pi$, also $\frac{gP}{M} < \frac{Q\pi}{\tau^2}$. Es sey ferner Qr der Weg, durch welchen die Masse weiter, als PQ gienge, wenn die bewegende Kraft in P schon so groß wäre, als sie in π ist, und während der Zeit τ unverändert bliebe. In diesem Fall hätte man $\frac{Qr}{\tau\tau} = \frac{gP'}{M}$, und $Qr > Q\pi$, also $\frac{gP'}{M} > \frac{Q\pi}{\tau\tau}$. Diesemnach ist der Bruch, oder das Verhältniß $\frac{Q\pi}{\tau\tau}$, allemahl zwischen den Gränzen $\frac{gP}{M}$ und $\frac{gP'}{M}$ enthalten, wie klein auch τ genommen wird. Da nun beyde Gränzen gleich werden, wenn τ verschwindet; so ist $\frac{gP}{M} = \frac{Q\pi}{\tau\tau}$, vorausgesetzt, daß man in diesem Ausdruck $\tau = 0$ setze, oder es ist $\frac{gP}{M}$ die Gränze des Verhältnisses $\frac{Q\pi}{\tau\tau}$, womit beyde Glieder desselben verschwinden.

Wenn, wie vorhin, $AP = s = at^3$ ist: so wird $P\pi = 3at^3 . \tau + 3at . \tau^2 + a . \tau^3$. Weil nun $3at^2 = c$, also $3at^2 . \tau = ct = PQ$ ist (6 §): so erhält man $P\pi = PQ + 3at . \tau^2 . + a . \tau^3$, und $P\pi - PQ = Q\pi = 3at . \tau^2 + a . \tau^3$. Folglich $\frac{Q\pi}{\tau^2} = 3at + a\tau$. Setzt man in diesem Ausdruck $\tau = 0$, so erhält man die Grenze des Verhältnisses $\frac{Q\pi}{\tau^2} = 3at = \frac{gP}{M}$.

Hier-

Hieraus findet sich zugleich die Grösse der Kraft $P = \frac{M}{g} \cdot 3at$.

100 §.

Diese Betrachtung ergiebt, wie wichtig die Theorie, von den Gränzen der Verhältnisse veränderlicher Grössen sey, wovon die ersten Grundbegriffe im 35 u. f. §. der A. R. bereits sind erklärt worden, und wovon im 466 §. Geom. Beyspiele vorkommen; dergleichen waren $\frac{\sin \frac{1}{n} A}{\frac{1}{u} A}$, $\frac{tang \frac{1}{n} A}{\frac{1}{n} A}$, u. s. f. wenn n als eine veränderliche Grösse betrachtet wird, die ohne Aufhören wächst und zuletzt $= \infty$ wird. Ist der Exponent eines Verhältnisses veränderlich: so ist es das Verhältniß auch. So hatte man im 99 §. $\frac{P\pi}{\tau} = 3at^2 + 3at \cdot \tau + \tau^2$. Dies Verhältniß nimmt ab, wenn τ kleiner wird: und weil $P\pi$ der in der Zeit τ zurückgelegte Weg ist; so nimmt $P\pi$ mit τ zugleich ab, und $P\pi$ ist desto kleiner, je kleiner τ genommen wird. Setzt man $\tau = 0$, so muß auch $P\pi = 0$ seyn. Aber in diesem Fall ist nicht zugleich $\frac{P\pi}{\tau} = 0$, sondern $= 3at^2$, der Exponent des Verhältnisses $\frac{P\pi}{\tau}$, nähert sich dem Werth $3at^2$ immer mehr, je kleiner τ angenommen wird, erreicht ihn aber nie, so lange τ noch eine bestimmte Grösse hat, sie sey so geringe, wie sie wolle. Kleiner als $3at^2$ kan der Exponent des Verhältnisses $\frac{P\pi}{\tau}$

nie

nie werden, und man kan ihn als den letzten unter allen Werthen des Verhältnisses $\frac{P\pi}{\tau}$ betrachten.

Die Theorie von diesen letzten Verhältnissen liegt bey einem sehr wichtigen und weitläuftigen Theil der mathematischen Erfindungskunst, der Differential- und Integral-Rechnung, zum Grunde. Diese Wissenschaften selbst sind zwar im vorhergehenden noch nicht erkläret worden. Indessen wird es nicht undienlich seyn, hier schon die ersten Grundsätze davon zu entwickeln. Es wird Anfänger, die bis hieher gekommen sind, belehren, daß sie noch mehr Theorie, als in den ersten beyden Theilen dieses Lehrbegrifs vorgetragen ist, lernen müssen, wenn sie es in der practischen Mathematik zu einiger Vollkommenheit bringen wollen. Es wird eine angenehme Vorbereitung auf die Wissenschaft selbst seyn, und es wird überdem dazu dienen, daß noch viele sehr nützliche Lehren der Mechanik hier kurz vorgetragen werden können, die sonst entweder ganz wegbleiben, oder in einen viel weitläuftigern Vortrag eingekleidet werden müsten.

101 §.

Wenn eine unbestimmte Gleichung zwischen zwoen veränderlichen Grössen, x und y, gegeben ist; so muß hier angenommen werden, man könne die Gleichung so verändern, daß die eine y allein auf die eine Seite des Gleichheitszeichens; auf die andre Seite aber ein Ausdruck gebracht werde, der die andre x allein, nebst den übrigen in der Gleichung vorkommenden beständigen Grössen enthalte, damit sich der Werth von y für jeden Werth von x bestimmen lasse. Ein solcher Ausdruck heist eine Function von x,

welche Redensart Joh. Bernoulli der Kürze wegen eingeführet hat. Dergleichen Functionen von x wären also z. E. die Ausdrücke: $ax+b$; fx^2+gx; $\sqrt{(aa-xx)}$ u. s. f. Jede veränderliche Grösse, die von einer andern abhängt, muß als eine Function der letztern betrachtet werden. Denn ein allgemeiner Ausdruck für die erste, muß allemahl die letzte enthalten, wenn derselbe zeigen soll, wie die erste von der andern abhängt. So ist bey jeder Bewegung der in der Zeit t zurückgelegte Weg s eine Function von t. Bey der gleichförmigen Bewegung ist $s=ct$. Bey der Bewegung, die von einer beständigen Kraft P herrührt, hat man $s=\frac{gP}{M}tt$. Die Geschwindigkeit c ist im ersten Fall eine beständige Grösse, im letzten Fall aber auch eine Function von t, und man hat $c=\frac{2gP}{M}t$.

102 §.

Es sey nun y eine Function von x, z. E. $y=ax^2$, und man nehme an, daß x um ein gewisses unbestimmtes Stück z wachse: so wird sich zugleich y ändern. Es sey y' der veränderte Werth von y, der herauskommt, wenn man $x+z$ statt x schreibt: so heist der Unterscheid beyder Werthe, y' und y, die Differenz der Function y, so wie z, als der Unterscheid beyder Werthe, x und $x+z$, die Differenz der veränderlichen Grösse x genannt wird. Ist z. E. $y=ax^2$; so wird $y'=a(x+z)^2=ax^2+2axz+az^2$, und $y'-y=2axz+az^2$. So wie es nun sonst gewöhnlich ist, das Zeichen $\surd$ statt des Worts: *radix*, und den Buchstab *l* statt des Worts:

Worts: Logarithmen, derjenigen Grösse voranzusetzen, deren Wurzel, oder Logarithme verstanden werden soll: so braucht man hier den Buchstab *d* statt des Worts: Differenz, und setzt ihn dem Buchstaben *x* oder *y* voran, um die Differenz von *x* oder *y* in dem eben angeführten Verstande anzuzeigen. Demnach ist *dy* soviel, als $y' - y$, und man schreibt $x + dx$ statt $x + z$, wenn *x* um ein unbestimmtes Stück wachsen soll; da dann *dx* kein Product zweener mit den Buchstaben *d* und *x* bezeichneten Grössen bedeutet, so wie auch *lx* dergleichen nicht anzeigt. Die Ausdrücke *dx*, *dy* bezeichnen einzelne Grössen, wie *lx*, *ly*, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, u.s.f. Eine Potenz der Ordnung *n* von *dx*, oder *dy* sollte eigentlich so geschrieben werden $(dx)^n$, $(dy)^n$. Weil man aber ein für allemahl weiß, daß das *d* hier keinen besondern Factor bedeute, sondern ein Ausdruck, wie *dx*, *dy*, als ein einzelner Buchstab in der Rechnung anzusehen sey: so schreibt man auch dx^n, dy^n, u.s.f. Wenn demnach $y = ax^2$ ist: so ist $dy = 2axdx + adx^2$.

103 §.

Das Verhältniß der beyden Differenzen der Function *y*, und ihrer veränderlichen Grösse *x* gegen einander ist gemeiniglich ein veränderliches Verhältniß. Hat man einen allgemeinen Ausdruck für das Verhältniß $\frac{dy}{dx}$; so hat es keine Schwierigkeit, die Gränze dieses Verhältnisses zu finden, womit beyde Glieder desselben zugleich verschwinden. Es ist nemlich aus der Natur der Sache klar, daß $dy = 0$ werden müsse, wenn man $dx = 0$ setzt. Denn *dy* ist das-

dasjenige Stück der Function y, um welches sich dieselbe ändert, wenn x um das Stück dx wächst. Wird nun $dx = 0$: so ändert sich x gar nicht, also muß sich auch y gar nicht ändern, und $dy = 0$ seyn. In diesem besondern Fall nun, wenn dx und dy verschwinden, braucht man statt des Worts: Differenz, das Wort: Differential; und nennet die Gränze des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$, dem sich dasselbe desto mehr nähert, je kleiner dx genommen wird, das Differential-Verhältniß der Function y. Man kan, um mehrer Deutlichkeit willen, statt des lateinischen d das Griechische Δ schreiben, so lange dx und dy bestimmte Werthe haben, und das d allein in dem Fall brauchen, wenn beyde Differenzen verschwinden. Wäre also $y = ax^2$: so hätte man überhaupt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a(2x + \Delta x)$, und das Differential-Verhältniß $\frac{dy}{dx} = 2ax$. Diese verschiedene Bezeichnungen hat H. Euler eingeführt, (Instit. Calc. diff. Cap. I. §. 4.) und es ist gewiß, daß sie ungemein geschickt sey, dieser Sache alle nöthige Deutlichkeit zu geben.

104 §.

Wenn die Function y von der veränderlichen Grösse x so abhängt, daß die Gleichung zwischen x und y unter dem allgemeinen Ausdruck $y = Ax^n + B$, enthalten ist, das Differential-Verhältniß $\frac{dy}{dx}$ zu finden; voraus-

gesetzt,

gesetzt, daß A und B beständige Grössen sind, n aber eine ganze Zahl bedeute.

Aufl. Es sey zuerst $y = Ax^2 + B$, und man schreibe $x + \Delta x$ statt x; so wird $y' = Ax^2 + 2Ax\Delta x + A\Delta x^2 + B$, folglich $y' - y = \Delta y = A(2x\Delta x + \Delta x^2)$ und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A(2x + \Delta x)$. Dies Verhältniß nähert sich der Gränze $2Ax$ desto mehr, je mehr Δx abnimmt: und wenn Δx verschwindet, so erhält man $\frac{dy}{dx} = A.2x = 2Ax$. Das würde für diesen speciellen Fall die Regel geben:

Man lasse die beständige Grösse B weg, vermindre den Exponenten der Potenz x^2, um 1, und multiplicire, was herauskommt, durch den Exponenten 2, mit Beybehaltung des beständigen Coefficienten A.

Diese Regel ist allgemein, und wenn $y = Ax^n + B$ ist: so wird allemahl $\frac{dy}{dx} = nAx^{n-1}$. Wenn nemlich diese Regel für eine bestimmte Grösse des Exponenten n gilt, so gilt sie auch für einen Exponenten, der um 1 grösser ist. Es sey $y = Ax^{n+1} + B$, und $Ax^n = z$: so ist $Ax^{n+1} = z.x$, und $y = z.x + B$. Wenn nun $x + \Delta x$ statt x geschrieben wird, so wird $z + \Delta z$, aus z, und $y + \Delta y$ aus y. Folglich erhält man $y + \Delta y = (z + \Delta z)(x + \Delta x) + B$, oder $y + \Delta y = z.x + x\Delta z + z.\Delta x + \Delta z.\Delta x + B$. Dies giebt $\Delta y = x.\Delta z + z.\Delta x + \Delta z.\Delta x$ und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x\frac{\Delta z}{\Delta x} + z + \Delta z$, folglich $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. Es war

aber $z = Ax^n$. Gilt nun die angenommene Regel für den Exponenten n; so ist $\frac{dz}{dx} = nAx^{n-1}$, folglich $\frac{dy}{dx} = nAx^n + Ax^n$, oder $\frac{dy}{dx} = (n+1)Ax^n$.

Man siehet leicht, daß dieser Ausdruck aus $y = Ax^{n+1} + B$ nach der angenommenen Regel folge. Die beständige Grösse B fällt weg; der Exponent $n+1$ ist um 1 vermindert, und was herauskommt, mit $n+1$ multiplicirt, der beständige Coefficient A aber beybehalten.

Nun gilt die Regel für $n = 2$, also auch für $n = 3$, folglich für $n = 4$, u. s. f. für jede ganze Zahl.

Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$; die man auch so ausdrücken kan, $dy = xdz + zdx$ folgt noch diese Regel: Wenn eine Function, wie $z.x + B$, durch ein Product zwoer veränderlicher Grössen x und z ausgedrückt ist, wozu noch eine beständige Grösse addirt seyn kan; so besteht ihr Differential aus zweenen Theilen, und jeder dieser Theile ist ein Product des einen Factors in das Differential des andern.

Dafern aber $y = \frac{z}{x} + B$ ist, so wird $dy = \frac{xdz - zdx}{xx}$. Es ist nemlich $\frac{z}{x} = z \times \frac{1}{x}$, also $dy = zd\frac{1}{x} + \frac{1}{x}dz$, und das Differential des Bruchs $\frac{1}{x}$ geben folgende Schlüsse. Es ist $\Delta.\frac{1}{x} = \frac{1}{x + \Delta x}$

$\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}$, und $\frac{1}{x+\Delta x} = \frac{1 : \Delta x}{\frac{x}{\Delta x}+1} =$

$\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}+1} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{x^2} + \frac{\Delta x^3}{x^3} \ldots\right)$ (225 §. A. R.) $= \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{x^2} + \frac{\Delta x^2}{x^3} - \frac{\Delta x^3}{x^4} \ldots$; also erhält man $\Delta . \frac{1}{x} =$

$-\frac{\Delta x}{x^2} + \frac{\Delta x^2}{x^3} - \frac{\Delta x^3}{x^4} \ldots$ und es ist das

Verhältniß $\frac{\Delta . \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{\Delta x}{x^3} - \frac{\Delta x^2}{x^4} \ldots$

also dessen Grenze $\frac{d . \frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, oder $d . \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$. Setzt man dies in den obigen Ausdruck für dy, so erhält man $dy = -\frac{z dx}{x^2} + \frac{dz}{x}$,

oder $dy = \frac{x dz - z dx}{x^2}$.

105 §.

Eine Function differentiiren heist ihr Differential-Verhältniß suchen, und die Differential-Rechnung beschäftigt sich mit den Regeln, nach welchen

man das Differential-Verhältniß einer jeden Function auf dem kürzesten Weg finden kan.

Die erwiesene Regel des 104 §. ist hinlänglich in allen solchen Fällen das Differential-Verhältniß zu finden, wenn die Function aus mehrern Theilen bestehet, die insgesammt Producte einer beständigen Grösse in eine Potenz einer veränderlichen Grösse sind, die eine ganze Zahl zum Exponenten hat. Man gehet mit einem jeden Theil so, wie im vor. §. um, und läst die beständigen Grössen, die nicht in veränderliche multiplicirt sind, weg.

Wäre nemlich überhaupt $y = P + Q + R \cdots + B$, wo P, Q, R, u. s. f. Functionen von x sind, B aber eine beständige Grösse ist: so muß man $y + \Delta y$ statt y, $P + \Delta P$ statt P, $Q + \Delta Q$ statt Q, u. s. f. schreiben, wenn man $x + \Delta x$ statt x setzt, B aber bleibt ungeändert. Also erhält man: $y + \Delta y = P + \Delta P + Q + \Delta Q + R + \Delta R \cdots + B$, $\Delta y = \Delta P + \Delta Q + \Delta R$ u. s. f. also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta P}{\Delta x} + \frac{\Delta Q}{\Delta x} + \frac{\Delta R}{\Delta x}$, folglich auch $\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx}$ u. s. f.

Unter diesen Theilen können auch Producte zwoer veränderlicher Factoren in einander vorkommen, und ihr Differential wird sodann nach der letzten Regel des vor. §. gefunden.

106 §.

Es ist wie im 99 §. eine Gleichung zwischen t und s gegeben, wenn die Buchstaben s und t die dort angezeigte Bedeutung haben: Man soll die Geschwindigkeit c der Masse M für je-

de

de Zeit t, imgleichen die Kraft P, welche die Masse bewegt, durch die Differential-Rechnung finden.

Aufl. Es ist allemahl $c = \frac{ds}{dt}$. Denn AP $= s$ ist eine solche Function von t, welche um das Stück $P\pi$ wächst, wenn $t+\tau$ aus t wird. Schreibt man nun nach dem 103 §. Δt statt τ, und Δs statt $P\pi$: so ist $\frac{ds}{dt}$ die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, oder $\frac{P\pi}{\tau}$, und diese ist vermöge des 99 §. $= c$. 138 Fig.

Die Kraft, welche die Masse bewegt, in dem Augenblick, da sie in P ankommt, sey $= P$. Wenn nun diese Kraft während der folgenden Zeit Δt sich nicht änderte: so würde die Geschwindigkeit in der Zeit Δt, um das Stück $\frac{2gP}{M}\Delta t$ wachsen (56 §.) Wenn aber die Kraft P während der Zeit Δt grösser wird; so erhellet, daß $\frac{2gP}{M}\Delta t$ kleiner sey, als dasjenige Stück, um welches c während der Zeit Δt wächst. Wird nun c' aus c, wenn $t+\Delta t$ aus t wird; so ist $c'-c=\Delta c$ eigentlich dasjenige, um welches c während der Zeit Δt grösser wird. Und es ist $\Delta c > \frac{2gP}{M}\Delta t$, oder $\frac{\Delta c}{\Delta t} > \frac{2gP}{M}$. Während der Zeit Δt sey nun P' aus P geworden, und $P' > P$: so erhellet, daß die Geschwindigkeit c, um das Stück $\frac{2gP'}{M}\cdot\Delta t$ gewachsen wäre, wenn

während der Zeit Δt die Masse M von einer beständigen Kraft $= P'$ beschleunigt wäre; und daß $\Delta c < \frac{2gP'}{M}\Delta t$, oder $\frac{\Delta c}{\Delta t} < \frac{2gP'}{M}$ sey. Beyde Grenzen, zwischen welchen das Verhältniß $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ fällt, nähern sich einander, wenn Δt abnimmt, und gehen zusammen, wenn $\Delta t = 0$, $= dt$ wird. Daher ist des Verhältnisses $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ Grenze $\frac{dc}{dt} = \frac{2gP}{M}$, und die gesuchte Kraft $P = \frac{M}{2g} \cdot \frac{dc}{dt}$.

Wenn $P' < P$ wäre, also P während der Zeit Δt abnähme; so würde sich in diesen Schlüssen nichts weiter als der Umstand ändern, daß $\Delta c < \frac{2gP}{M}\Delta t$, und $\Delta c > \frac{2gP'}{M}\Delta t$ seyn müste. Uebrigens würde daraus eben so wie vorhin $\frac{dc}{dt} = \frac{2gP}{M}$ folgen.

Wäre also, wie im 99 §, z. E. $s = at^3$; so fände man durch die Differentialrechnung $\frac{ds}{dt} = 3at^2 = c$, und $\frac{dc}{dt} = 6at$, folglich $P = \frac{M}{g} \cdot 3at$, wie im 99 §. Man siehet hieraus, daß die Differential-Rechnung eine überaus vortheilhafte Verkürzung vieler Rechnungen sey, die ohne ihre Hülfe viel weitläuftiger gerathen würden. Und dieser Vortheil wird desto wichtiger, je verwickelter die Functionen sind.

107 §.

Wenn y eine Function der veränderlichen Grösse x ist; so ist in den meisten Fällen ihr Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ ebenfalls eine Function von x. Ist nun z. E. $\frac{dy}{dx} = Ax^n$: so würde aus dieser Gleichung die folgende $dy = Ax^n dx$ flieſſen, wenn dy und dx bestimmte endliche Werthe hätten. Man kan auch alsdenn, wenn dy und dx als verschwindende Grössen betrachtet werden, den letzten Ausdruck, wie $dy = Ax^n dx$ brauchen, weil er in der Rechnung seine Bequemlichkeiten hat. Man siehet alsdenn dx und dy als unendlich kleine Werthe von Δx und Δy an, und man weiß nun schon, was dieser Ausdruck sagen will. Nun ist, vermöge des 106 §. allemahl $\frac{ds}{dt} = c$. Hätten ds und dt bestimmte Werthe, und die Masse M gienge in der Zeit dt gleichförmig durch den Weg ds: so wäre ebenfalls $\frac{ds}{dt} = c$ (6 §). Also kan man überhaupt sagen, bey jeder ungleichförmigen Bewegung gehe die bewegte Masse eben so fort, als wenn sie in unendlich kleinen Zeittheilen, unendlich kleine Theile ihres Weges gleichförmig durchliefe. Man vergleiche hiemit den 38 §. Ferner ist vermöge des 106 § allemahl $\frac{dc}{dt} = \frac{2gP}{M}$, oder wie es auch ausgedruckt werden kan $dc = \frac{2gP}{M} dt$. Hätten dc und dt bestimmte Werthe; und theilte eine beständige

ständige Kraft P der Masse M während der Zeit dt, die Geschwindigkeit dc mit: so wäre ebenfalls $dc = \frac{2gP}{M} dt$ (56 §.) Wenn also gleich die Kraft P, welche die Masse M bewegt, veränderlich ist: so erfolgt doch die Bewegung eben so, als wenn die Kraft P während unendlich kleiner Zeittheilchen eine beständige Kraft bliebe. Alles dies sind nur uneigentliche Redensarten, welche dazu dienen, bey Auflösung mechanischer Aufgaben eine Rechnung kürzer zu übersehen.

108 §.

147 Fig. Eine unbestimmte Gleichung zwischen zwoen veränderlichen Grössen x und y kann allemahl als eine solche betrachtet werden, welche die Natur einer gewissen Linie HM ausdrückt, die auf einer ebenen Fläche verzeichnet worden (81 §.), wenn eine der veränderlichen Grössen x als die Abscisse AP, und die andre y als die zugehörige Ordinate PM angesehen wird. Es ist allemahl die Ordinate $PM = y$ eine Function der zugehörigen Abscisse $AP = x$. Man nehme an, AP wachse, und es werde AQ aus AP: so wird QN aus PM. Man ziehe MR mit AP parallel: so ist $PQ = AQ - AP = \Delta x$, und $RN = QN - PM = \Delta y$. Hat man nun eine Gleichung zwischen x und y: so läst sich auch daraus eine Gleichung zwischen Δx und Δy finden. Wäre z. E. $y = ax^2$; so wäre $\Delta y = a(2x . \Delta x + \Delta x^2)$.

Es sey die Abscisse AP bey B, D, F, u. s. f. in gleiche Theile getheilt, wovon jeder $= PQ = \Delta x$ ist; durch A, B, D, u. s. f. ziehe man die Ordinaten AH, BC, DE, u. s. f., welche den Abscissen $x = 0$, $x =$ AB, $x =$ AD, u. s. f. zugehören: ferner ziehe man

durch

durch C, E, G, u. s. f. mit AP die Parallelen Hc, Ce, u. s. f. so ist Δy ein allgemeiner Ausdruck für Cc, Ee u. s. f. nachdem man in der Gleichung für Δy entweder $x = 0$, oder $x = AB$, oder $x = AD$ u. s. f. setzt. Dies desto desto deutlicher zu zeigen, sey $\Delta y = 2ax . \Delta x + a\Delta x^2$; so erhält man

für	den Werth
$x = 0$	$\Delta y = cC = a\Delta x^2$
$x = AB$	$\Delta y = eE = 2a . AB . \Delta x + a\Delta x^2$
$x = AD$	$\Delta y = gG = 2a . AD . \Delta x + a\Delta x^2$
$x = AF$	$\Delta y = mM = 2a . AF . \Delta x + a\Delta x^2$

Weil nun H*h* mit AP parallel ist, so erhellet, daß *h*M die Summe aller dieser Werthe von Δy sey. Und wenn man noch P*h* = AH dazu addirt, so wird diese Summe = PM = y, so wie AP die Summe aller Werthe von Δx ist. Dies ist wahr, man mag Δx, und also auch die Werthe von Δy so klein nehmen, als man will. Man kan also auch y als die letzte aller dieser Summen betrachten, worauf man kommt, wenn Δx und Δy verschwinden.

109 §.

Auf diese Betrachtungen gründen sich folgende Redensarten und Bezeichnungen. Jede Function y einer veränderlichen Grösse x heist die **Summe**, oder das **Integral** ihres Differentials. Hat man $y = ax^2 + b$, also $dy = 2axdx$; so heist $ax^2 + b$ das Integral oder die Summe von $2axdx$. Wenn man den Buchstab $\int$ einem Differential $2axdx$ auf diese Art voransetzt: $\int 2axdx$; so bedeutet er die Summe, oder das Integral dieses Differentials, und es ist $\int 2axdx = ax^2 + b$. Ein gegebenes Differential integriren, heist desselben Integral suchen,

oder

oder mit andern Worten: aus dem gegebenen Differential-Verhältniß einer Function den allgemeinen Ausdruck derjenigen Function suchen, welcher das Differential-Verhältniß zugehört. Die Integral-Rechnung beschäftigt sich mit den Regeln, nach welchen sich dieses jedesmahl am kürzesten bewerkstelligen läst.

110 §.

Wenn das Differential einer Function y der veränderlichen Grösse x unter dem allgemeinen Ausdruck $dy = Ax^n dx$ enthalten ist, das Integral zu finden.

Aufl. Man lasse dx weg, addire 1 zum Exponenten n, und dividire was herauskommt durch den um 1 vermehrten Exponenten $n+1$. Zum Quotienten addire man eine beständige Grösse B: so ist das, was heraus kommt, das gesuchte Integral.

Auf solche Art wird $y = \int Ax^n dx = \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + B$.

Die Vergleichung mit dem 104 § beweiset die Richtigkeit dieses Verfahrens. Man darf nur die dortigen Regeln umkehren. Differentiirt man den Ausdruck $y = \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + B$: so kommt $dy = Ax^n dx$ wieder heraus, wie erfordert wird.

Wie groß die beständige Grösse B zu nehmen sey, ergiebt sich in jedem besondern Fall von selbst, wenn man diese Rechnung bey Auflösung besondrer Aufgaben anwendet. Gewöhnlich kennet man aus den Umständen der Aufgabe einen bestimmten Werth von y, der einem bestimmten Werthe von x zugehört. Beyde Werthe setzt man nach geschehener Integration

tion statt y und x: so hat man eine Gleichung, die ausser B lauter beständige Grössen enthält, und daraus kan man B finden.

111 §.

Wenn das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ aus mehrern Theilen, wie Ax^n, Bx^m, Cx^r, u. s. f. bestehet: so integrirt man das Differential $dy = Ax^n dx + Bx^m dx + Cx^r dx$ - - -, wenn man mit jedem Theil eben so, wie im vor. §. umgehet, und zuletzt eine beständige Grösse zusetzt, die in jedem besondern Fall, auf eine ähnliche Art bestimmt wird. So wäre

$$y = \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + \frac{Bx^{m+1}}{m+1} + \frac{Cx^{r+1}}{r+1} \text{ - - - } + E.$$

Die Vergleichung mit dem 105 §. beweist die Richtigkeit dieses Verfahrens.

Dafern aber unter den Theilen des Differentials solche vorkommen, die Producte einer veränderlichen Grösse in das Differential einer andern veränderlichen Grösse sind, wie z. E. xdz; so muß man nachsehen, ob unter den übrigen Theilen nicht ein ähnliches Product zdx befindlich sey, wo nemlich der eine Factor das Differential des vorigen veränderlichen Factors, des andern Factors Differential aber ein Factor des ersten Products ist. Das Integral der Summen dieser beyden Theile ist das Product xz beyder veränderlicher Factoren in einander. So ist $\int(xdz + zdx) = xz + B$, wie aus der letzten Regel des 104 §. erhellet.

Diese kurze Entwickelung der ersten Grundsätze der Differential- und Integral-Rechnung kan hier genügen. Die Wissenschaften selbst werden in den

folgen-

folgenden Theilen dieses Lehrbegrifs vollständiger abgehandelt werden. Die nunmehrige Anwendung davon auf die Mechanik wird eine Probe davon abgeben, wie wichtig diese Theorie für die Ausübung sey.

112 §.

I) Es ist eine Gleichung gegeben, welche die Kraft P durch die Zeit t ausdrückt, binnen der die Masse M von dieser Kraft durch den Weg s bewegt wird: man soll die Geschwindigkeit c finden, womit die Masse M in jedem Augenblick der Zeit t fortgehet.

Aufl. Es ist allemahl $dc = \frac{2gP}{M} dt$ (106§) also $c = \int \frac{2gP}{M} dt$. Daher wird c in jedem Fall gefunden, wenn man das Integral $\int \frac{2gP}{M} dt$ finden kan, und zwar erhält man c durch eine Function der Zeit t ausgedrückt.

II) Es ist eine Gleichung gegeben, welche die Kraft P durch den Weg s ausdrückt, den die Masse M in der Zeit t zurücke legt: man soll die Geschwindigkeit c finden, womit die Masse M in jedem Punct des Weges s, fortgehet.

Aufl. Es ist $dc = \frac{2gP}{M} dt$; also $2cdc = \frac{4gP}{M} cdt$. Aber $cdt = ds$ (106§.); also $2cdc = \frac{4gP}{M} ds$, und hieraus folgt durch die Integration

$cc =$

$cc = \int \frac{4gP}{M} ds$. Dies giebt einen Ausdruck, der cc durch s bestimmt, woraus also die Quadratwurzel genommen, c giebt.

113 §.

I) Die Geschwindigkeit c ist als eine Function der Zeit t, entweder nach dem 112 § gefunden; oder sonst gegeben: man soll den in der Zeit t zurückgelegten Weg s finden.

Aufl. Es ist $ds = cdt$. Also giebt die Integral-Rechnung $s = \int cdt$, und dies wird eine Gleichung, welche s durch t ausdrückt.

II) Die Geschwindigkeit c ist als eine Function des zurückgelegten Weges s entweder nach dem 112 §. gefunden; oder sonst gegeben: man soll die Zeit t finden, binnen welcher ein gegebenes Stück des Weges s zurückgeleget wird.

Aufl. Es ist $ds = cdt$, also $dt = \frac{1}{c} ds$. Demnach giebt die Integralrechnung $t = \int \frac{1}{c} ds$, wodurch man eine Gleichung erhält, die t durch s ausdrückt.

Die vier Aufgaben dieses, und des vor. §. enthalten die allgemeinen Gründe der ganzen Mechanik. Wer diese geschickt anzuwenden weiß, und in der Integralrechnung geübt ist, der hat die ganze Wissenschaft in seiner Gewalt. Man kan diese allgemeinen Ausdrücke durch geometrische Verzeichnungen erläutern, und es wird nicht undienlich seyn, dies

Verfahren hier ebenfalls ins Licht zu setzen. Ehe und bevor die Integral-Rechnung zu der jetzigen Vollkommenheit gebracht war, muste man sich oft durch dieses Mittel helfen, und es leistet auch dann noch zuweilen seine Dienste, wenn man auf Differentialien kommt, deren Integrale durch die bisher bekannten Methoden, nicht gefunden werden können. Weil gegenwärtig die Integral-Rechnung noch nicht in ihrem völligen Umfange als bekannt vorausgesetzt wird: so wird es ebenfalls bey einigen besondern Aufgaben dienen, die Auflösungen zu finden, die sonst nicht, ohne mehr Theorie der Integral-Rechnung vorauszusetzen, gefunden werden könnten.

114 §.

Eine Linie quadriren, heist den Inhalt einer von dieser Linie entweder ganz oder zum Theil begränzten Ebene suchen, oder vielmehr das Verhältniß des Inhalts dieser Fläche zu einem Quadrat suchen, dessen Seite die angenommene Einheit ist.

147 Fig. Es ist die Gleichung zwischen $AP=x$, und $PM=y$ gegeben, welche die Natur der Linie HM ausdrückt: man soll einen allgemeinen Ausdruck für die Fläche $APMH$ finden, die zwischen der Abscisse AP, den beyden Ordinaten durch A und P, und der Linie HM enthalten ist; oder mit andern Worten: man soll die Linie HM quadriren.

Aufl. Es ist diese Fläche APMH eine Function der Abscisse, weil ihre Grösse davon abhängt, nachdem man AP grösser oder kleiner nimmt. Für einen gewissen Werth $AP=x$ sey $APMH=z$, und es wachse AP um das Stück $PQ=\Delta x$; so wächst die zu-

zugehörige Fläche um das Stück PQNM $= \triangle z$. Wenn man nun die Rechtecke QM, und PN verzeichnet: so ist QM $= y\triangle x$, und PN $= (y+\triangle y)\triangle x$. Es erhellet aber, daß $\triangle z > y\triangle x$, und $\triangle z < (y+\triangle y)\triangle x$ sey, oder es ist $\frac{\triangle z}{\triangle x} > y$, und $\frac{\triangle z}{\triangle x} < y+\triangle y$. Je kleiner nun $\triangle x$ genommen wird, desto mehr nähern sich die beyden Grenzen y, und $y+\triangle y$, zwischen welchen das Verhältniß $\frac{\triangle z}{\triangle x}$ fällt; und wenn $\triangle x$ verschwindet, so werden beyde Grenzen gleich. Also ist des Verhältnisses $\frac{\triangle z}{\triangle x}$ Grenze $\frac{dz}{dx} = y$, oder $dz = ydx$, und die Integral-Rechnung giebt $z = \int ydx =$ APMH. Alle diese Schlüsse gelten noch, wenn gleich der Coordinaten-Winkel kein rechter, sondern ein schiefer Winkel ist. Nur wird in diesem Fall QM ein schiefwinklichtes Parallelogram, und der Inhalt desselben $= y\triangle x \sin\alpha$, wenn APM $= \alpha$ ist, und daraus folgt denn auch $dz = ydx \sin\alpha$ und $z = \sin\alpha \int ydx$.

Man kan also $ydx \sin\alpha$ das Differential der Fläche APMH nennen, und es als ein verschwindendes Parallelogramen betrachten, so wie die Fläche APMH als eine Summe unendlich vieler, unendlich kleiner Parallelogramme. Es hat aber eigentlich damit diese Bewandniß. Man vertheile die Abscisse AP in gleiche Theile AB $=$ BD u. s. f. $=$ PQ $= \triangle x$, und beschreibe in und um die Fläche APMH die Parallelogramme BH, DC, FE u. s. f. bis PG, imgleichen AC, BE, DG u. s. f. bis FM: so ist die Summe

aller Parallelogramme in der Fläche kleiner; die Summe aller Parallelogramme um die Fläche aber grösser, als APMH, und dies allemahl, es mag $\triangle x$ so klein, als man will, genommen werden. Beyde Summen nähern sich der Gleichheit desto mehr, je mehr $\triangle x$ abnimmt, und eben diese Fläche APMH ist als die letzte aller Summen der Parallelogramme in oder um diese Fläche anzusehen, so wie der Kreis als das letzte aller um oder in demselben beschriebener Polygone, betrachtet werden kan.

Der Ausdruck APMH $= \int y dx$ läst sich auch so verändern. Es ist $y = \int dy$, also APMH $= \int dx \int dy$. Dies will so viel sagen. Wenn man dy durch eine Function von x und dx ausgedrückt hätte, so müste man dies Differential zuerst integriren, das gefundene Integral mit dx multipliciren, und sodann aufs neue integriren. Dies vorausgesetzt, läst sich auch dz so ausdrücken $dz = dx dy$. Hiemit hat es folgende Bewandniß. Wenn man alle Parallelen Hc, Ce, Eg u. s. f. verlängert, bis sie mit PM zusammen stossen, so wird die ganze Ebene APMH in Rechtecke vertheilt und von denjenigen, welche zwischen Hh und hM liegen, läst sich ein jedes unbestimmt durch $\triangle x \triangle y$ ausdrücken. Die Seite $\triangle x$ ist immer einerley, aber $\triangle y$ ändert sich mit x, und wird durch x bestimmt. Für $x =$ AP wird $\triangle x =$ MR, $\triangle y =$ RN, und $\triangle y \triangle x =$ MRNO. Die Summe aller dieser Rechtecke ist grösser, als die dreyseitige Figur HhM, sie kommt derselben aber desto näher, je kleiner $\triangle x$ genommen wird, und die letzte aller dieser Summen, worauf man kommt, wenn $\triangle x$ und $\triangle y$ verschwinden, ist mit HhM einerley. Diese letzte Summe giebt nun die Integration, und

man kan sich die Sache so vorstellen, als wenn die ganze Figur aus unendlich vielen solchen unendlich kleinen Rechtecken zusammen gesetzt wäre, wovon beyde Seiten unendlich klein sind. Vorhin ward die Figur auch als eine Summe unendlich kleiner Rechtecke betrachtet, wovon aber die eine Seite y endlich, die andre dx unendlich klein war. Wenn also $dz = dxdy$ gesetzt wird, so stellt die erste Integration die eine endliche Seite des Rechtecks ydx her, da dann die zweyte Integration $\int ydx$ wie vorhin giebt.

Alle diese Schlüsse gelten auch, wenn der Coordinatenwinkel APM $= \alpha$ schief ist. Nur erhält man in diesem Fall $dz = dxdy \sin\alpha$, und $z = \sin\alpha \int dx \int dy$. Die ganze Fläche wird in allen Fällen, als eine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Parallelogramme betrachtet.

Weil jede Function einer veränderlichen Grösse, als die Ordinate einer Linie betrachtet werden kan: so läst sich jedes Differential als das Differential einer Fläche, und jedes Integral als eine Formul betrachten, welche die Quadratur einer gewissen Linie ausdrückt. Ist z. E. $\frac{dc}{dt} = T$, und T eine Function von t: so wird $c = \int T dt$. Verzeichnet man eine Linie HM, so daß jeder Abscisse AP $= t$, die Ordinate PM $= u = T$ zugehört: so wird die Fläche APMH $= \int T dt = c$. Kan man also das Integral $\int T dt$ finden, so kan man die Fläche quadriren: und umgekehrt, wenn die Linie HM gehörig verzeichnet, und der Inhalt der Fläche APMH gefunden ist; so ist zugleich das Integral $\int T dt$ gefunden. Eigentlich aber will dies nur so viel sagen: das Integral

$\int T\,dt$ verhält sich zu der für die Einheit angenommenen Linie, wodurch man die Abscissen als Zahlen ausdrückt, wie der Inhalt der Fläche APMH zum Quadrat dieser für die Einheit genommenen Linie. Denn eigentlich drückt jedes Integral eine Linie und keine Fläche aus. Diese Betrachtungen wendet man auf die bey Auflösung der Aufgaben des 112 und 113 §, nöthigen Integrationen auf folgende Art an.

115 §.

Es sey eine Gleichung gegeben, welche die Kraft P durch t ausdrückt, so daß P als eine Function der Zeit t bekannt ist. Die Beschleunigung der Kraft P sey V: so hat man $V = \frac{gP}{M}$. Nun kan man eine Linie HM verzeichnen, welche durch die Gleichung $V = \frac{gP}{M}$ ausgedrückt wird, wenn die Abscissen $AP = t$, und die zugehörigen Ordinaten $PM = V$ genommen werden. Diese Linie kan die Scale der Beschleunigungen (scala accelerationum) der Kraft P heissen. Nun ist allemahl $dc = \frac{2gP}{M}\,dt$, oder hier $dc = 2V\,dt$, weil $\frac{gP}{M} = V$ gesetzt ist; also $c = 2\int V\,dt$. Aber $\int V\,dt = APMH$ (114 §.), also $c = 2.APMH$. Daher hängt die Auflösung der ersten Aufgabe des 112 §. d.i. die Berechnung der Geschwindigkeit c, von der Quadratur der Scale der Accelerationen ab. Aus dem vor. §. ergiebt sich, wie dies müsse verstanden werden. Es ist c eine Linie, keine Fläche, und die Sache ist eigentlich diese. Die doppelte Fläche APMH ver-

verhält sich zum Quadrat der für die Einheit angenommenen Linie, z. E. einen Quadratfuß, wie die Geschwindigkeit c zur Einheit selbst z. E. 1 Fuß.

Es ist aber nicht allemahl die Kraft P als eine Function der Zeit t, sondern fast in den mehresten Fällen, als eine Function des von der Masse M in der Zeit t zurückgelegten Weges s gegeben, wie die zwote Aufgabe des 112 §. voraussetzt. Verzeichnet man nun eine Linie hm, der die Gleichung $V = \frac{gP}{M}$ zugehört: so muß man die Abscisse $ap = s$ nehmen, und die zugehörigen Ordinaten $pm = V$. Diese Linie kan gleichfalls die Scale der Beschleunigungen der Kraft P heissen. Nun hat man aber $cc = 4\int \frac{gP}{M} ds$ (112 §.), und $\int \frac{gP}{M} ds = \int V ds =$ $apmh$; also in diesem Falle $cc = 4.apmh$, daß also wiederum die Berechnung der Geschwindigkeit von der Quadratur dieser Scale der Beschleunigungen abhängt. 148 Fig.

116 §.

Dafern eine Linie HM so verzeichnet ist, daß jede Abscisse $AP = t$, die zugehörige Ordinate PM aber der in der Zeit t erlangten Geschwindigkeit c gleich ist: so heist HM die Scale der Geschwindigkeiten (scala celeritatum). Wenn aber eine Linie hm so verzeichnet ist, daß jede Abscisse den, in der Zeit t zurückgelegten Weg s ausdrückt, und die zugehörige Ordinate $pm = \frac{1}{c}$ ist: so kan sie die umgekehrte Scale der Geschwindigkeiten (scala celeritatum reciproca) heissen. Wenn man nemlich in diesem Fall ein 147 Fig. 149 Fig.

Abscissen *ap* und *aq* nimmt, die sich wie die in verschiedenen Zeiten zurückgelegten Wege verhalten: so sind die zugehörigen Ordinaten in dem umgekehrten Verhältnisse der Geschwindigkeiten.

Vermöge des 103 §. ist allemahl $s = fcdt$, überdem aber ist $fcdt =$ APMH, wenn HM die Scale der Geschwindigkeiten ist; also kan man $s =$ APMH setzen. Nur heist dies wieder nichts anders, als so viel, es sey APMH : $1^2 = s : 1$. Denn s ist eine Linie, und diese wird durch eben die Zahl ausgedrückt, wie die Fläche APMH, wenn bey der letztern das Quadrat derjenigen Linie die Einheit ist, wodurch man die Linie s ausdrückt.

Ferner ist vermöge des 113 §. $t = \int \frac{1}{c} ds$, und

$\int \frac{1}{c} ds = apmh$, wenn *hm* die umgekehrte Scale der Geschwindigkeiten ist: also erhält man $t = apmh$, und aus dem vorigen ergiebt sich, wie dies müsse verstanden werden. Es bedeutet hier t eine Linie, die sich zur Einheit verhält, wie die Zeit t zu 1 Secunde, und es ist $t : 1 = apmh : 1^2$.

117 §.

Weil bey allen Messungen die Einheit, oder das Maaß, womit man die übrigen Grössen vergleicht, ganz willkührlich ist: so ist es auch ganz gleichgültig, ob man die bisherige Voraussetzung beybehalten, und die Zeit t in Secunden ausdrücken (4 §.), oder zu diesem Maaß der Zeit eine Minute, eine Stunde, u. s. f. erwählen will. Wenn man aber diese bisherige Voraussetzung ändern, und statt einer Secunde

ein

ein andres Maaß der Zeit brauchen will, um t dadurch auszudrücken: so werden auch die bisherigen allgemeinen Ausdrücke einige Aenderungen leiden.

In den Gleichungen $dc = \frac{2gPdt}{M}$, und $cdc = \frac{2gPds}{M}$ (112 §.) bedeutet g die Höhe, von welcher ein schwerer Körper in der ersten Secunde frey herabfällt, oder die Beschleunigung der Schwere in dem Verstande des 43 §., so wie $\frac{dc}{2dt} = \frac{gP}{M}$ die Beschleunigung der Kraft P ist: und man muß dadurch ebenfalls den Weg verstehen, durch welchen die Masse M in einer Secunde wegen Würkung der Kraft P fortrücken würde, wenn sich P während dieser Secunde nicht änderte. Drückt man t durch eine andre Einheit, z. E. Tertien aus: so muß man durch g die Höhe verstehen, wovon ein schwerer Körper in der ersten Tertie frey herabfällt; und es giebt ebenfalls $\frac{dc}{2dt} = \frac{gP}{M}$ den Weg, durch welchen die Masse M wegen Würkung der Kraft P in einer Tertie fortrückte, wenn P so lange unveränderlich bliebe. Bey dieser Voraussetzung also könnte nicht $g = 15{,}625$ Rh. Fuß gesetzt werden: man müste vielmehr $g = 15{,}625 \times \frac{1}{60^2}$ (25 §) $= 0{,}00434$ Rh. F. setzen; oder $g = 4{,}34$ Scrupeln eines Rh. F. Bey eben dieser geänderten Voraussetzung drückt auch $\frac{ds}{dt}$ den Weg aus, den die Masse M in einer

Tertie gleichförmig zurücklegen würde, und so müste nun allemahl der Ausdruck: Geschwindigkeit verstanden werden.

Wenn aber eine Masse mit einer gewissen Geschwindigkeit c fortgehet: so läst sich allemahl nach dem 32 §. eine Höhe angeben, wovon die Masse frey herabfallen müste, um eben die Geschwindigkeit zu erlangen. Ist v diese Höhe, so hat man $v = \frac{cc}{4g}$: und nun ist es gleichviel, ob man die Geschwindigkeit selbst, oder diese ihr zugehörige Höhe in Rechnung bringt, weil eins aus dem andern leicht gefunden wird. Es würde aber v aus c, und umgekehrt, am kürzesten gefunden werden können, wenn man $g = \frac{1}{4}$ setzen könnte. Bey dieser Voraussetzung hätte man $v = cc$, und $c = \sqrt{v}$. Weil nun g diejenige Höhe ist, wovon eine schwere Masse in demjenigen Zeittheilchen frey herabfällt, was man bey der übrigen Rechnung $= 1$ setzt; so kan man suchen, wie groß dieses Zeittheilchen seyn muß, damit $g = \frac{1}{4}$ werde. Drückt man alsdenn die zurückgelegten Wege, in Scrupeln eines Rh. F. aus, so kan man durch g sodann $\frac{1}{4}$ Scrupel eines Rh. F. verstehen. Wenn aber s die Höhe ist, wovon eine schwere Masse in der Zeit t herabfällt; so hat man $s = gtt$, oder $s = 15625tt$. Soll nun $s = \frac{1}{4}$ seyn: so wird $t = \sqrt{\frac{1}{4 \times 15625}} = \frac{1}{250}$ Secunde. Dafern also die zurückgelegten Wege in Scrupeln eines Rh. F. und die Zeit t in $\frac{1}{250}$ Secunden ausgedrückt sind: so wird $g = \frac{1}{4}$ Scr. eines Rh. F. und man kan $v = cc$, also $c = \sqrt{v}$ setzen. Dabey ist aber zu bemerken,

daß

daß nun $c = \frac{ds}{dt}$ den Weg ausdrücke, durch welchen der Körper in $\frac{1}{250}$ Secunden gleichförmig fortgehen würde.

Nun kan man auch in den Gleichungen des 112§ $g = \frac{1}{4}$ setzen, und man erhält $dc = \frac{Pdt}{2M}$, und $2cdc = \frac{P}{M}ds$. Ist nun v die der Geschwindigkeit c zugehörige Höhe, so wird $cc = v$, also $2cdc = dv$, und $dv = \frac{P}{M}ds$. Hiebey ist wiederum zu bemerken, daß $\frac{dc}{2dt} = \frac{P}{4M}$ den Weg ausdrücke, durch welchen die Masse M wegen Würkung der Kraft P in $\frac{1}{250}$ Sec. fortrücke, wenn P so lange unveränderlich bliebe.

Die Gleichungen $dc = \frac{Pdt}{2M}$, und $dv = \frac{P}{M}ds$, oder $dc = \frac{1}{2}pdt$, und $dv = pds$, wenn man $\frac{P}{M}$, als die Beschleunigung der Kraft P in dem Verstande des 54§. $= p$ setzt, braucht Hr. Euler in der Mechanica sive motus scientia analytice exposita Petrop. 1736. Aber in der Theoria motus corporum solidorum Rost. et Gryph. 1765. hat er den Gebrauch eben dieser Gleichungen, so wie sie im 112§. ausgedruckt sind, bequemer gefunden. Die eben angestellte Betrachtung dienet nicht allein beyde Arten des Ausdrucks sondern auch die Resultate der Rechnungen zu vergleichen, wobey entweder der eine oder

der

der andre Ausdruck zum Grunde liegt. Die Formuln der letztern Eulerischen Mechanik verwandeln sich in die Formuln der ersten, wenn man $g = \frac{1}{4}$, und statt cc die Höhe v setzt. Aus den Formuln der ersten aber erhält man die Formuln der letztern, wenn man allenthalben, wo die Höhe v vorkommt $\frac{cc}{4g}$, statt v schreibt, und wo t vorkommt, $2t\sqrt{g}$ statt t setzt.

Der VII. Abschnitt.

Von der Schwung-Bewegung im Kreise.

118 §.

150 Fig. Ein Punct A gehet in der graden Linie AB mit der Geschwindigkeit $BC = c$ gleichförmig fort; trift aber in B auf die Ebene BD so, daß er seine Bewegung nicht anders, als nach der Richtung BD fortsetzen kan: man sucht die Geschwindigkeit, womit er in BD fortgehen wird.

Aufl. Es sey der Winkel $DBC = \alpha$, und BE auf BD senkrecht, so zerlegt sich die Geschwindigkeit BC in die Seiten-Geschwindigkeiten BD und BE, so daß $BD = c.\cos\alpha$, und $BE = c.\sin\alpha$ ist. Die letztere Geschwindigkeit wird von der Ebene BD völlig zernichtet; also behält der Punct A nur die Geschwindigkeit $c.\cos\alpha$ nach der Richtung BD: oder

weil

weil $\cos\alpha = 1 - \sin.v.\alpha$, so ist die Geschwindigkeit nach der Richtung $BD = c - c.\sin v.\alpha$.

Wenn also ein Punct durch AB gleichförmig mit 151
der Geschwindigkeit c fortgehet; aber in B, C, D, Fig.
genöthiget ist, nach den Richtungen BC, CD, DE, fortzugehen, welche bey B, C, D, die Winkel α, β, γ einschliessen: so ist die Geschwindigkeit

durch $BC = c - c.\sin.v\,\alpha = c'$
durch $CD = c' - c'\sin v.\beta = c''$
durch $DE = c'' - c''\sin v.\gamma = c'''$ u. s. f.

Demnach verliert der Punct bey jeder Brechung seines Weges einen Theil seiner Geschwindigkeit, und nach der letzten Brechung hat er die Geschwindigkeit $c\sin v\,\alpha + c'\sin.v.\beta + c''\sin.v.\gamma$, u. s. f. verlohren. Da nun $c', c'' c'''$, u. s. f. alle kleiner als c sind: so ist der gesammte Verlust der Geschwindigkeit kleiner, als c ($\sin v\alpha + \sin v\beta + \sin v\gamma +$ etc.) und wenn alle Winkel α, β, γ, u. s. f. gleich groß sind; ihre Anzahl aber $= n$ ist: so ist der gesammte Verlust der Geschwindigkeit, kleiner als $c.n\sin v.\alpha$.

119 §.

Es sey ADG ein Kreisbogen, und in demselben 152
sey eine regulär gebrochene Linie BCDEFG beschrie- Fig.
ben: so sind die auswendigen Winkel bey B, C, D, u. s. f. als die Ergänzungen der Polygonwinkel zu 180°, alle gleich groß. Es sey jeder $= \alpha$; so ist $\sin v.\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$ (434 §. G.) $= \frac{1}{2}(2\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$ $= \frac{1}{2}$ chord. α^2 (398 §. G.) Aber chord. $\alpha < \alpha$, folglich $\sin v.\alpha < \frac{1}{2}\alpha^2$, und $n\sin v\alpha < \frac{1}{2}n\alpha^2$; oder $n\sin v\alpha < \frac{nn\alpha^2}{2n}$. Wenn nun ein Punct nach dieser gebrochenen Linie, und zwar durch AB mit der

Ge-

Geschwindigkeit c fortgeht: so ist der gesammte Verlust der Geschwindigkeit, nachdem er in FG angekommen kleiner, als $cn \sin v\alpha$ (118 §.), folglich kleiner, als $\frac{(n\alpha)^2}{2n} c$.

Verlängert man AB und GF, bis sie sich in L schneiden: so wird der Winkel $ALM = n\alpha$, wie man leicht siehet, wenn BC, CD, DE, u. s. f. gleichfalls bis K, I, H, u. s. f. verlängert werden (87 §. G.) folglich der gesammte Verlust der Geschwindigkeit kleiner, als $\frac{ALM^2}{2n} c$.

Je mehr Seiten die gebrochene Linie ABCDEFG bekommt, desto grösser wird n, und desto mehr nähert sich diese Linie dem Kreisbogen, und der Verlust der Geschwindigkeit, wird desto kleiner, weil $\frac{ALM^2}{2n} c$ desto kleiner wird. Sind überdem AT und Gt ein paar Tangenten an den äussersten Endpuncten des Kreisbogens: so nähert sich die Lage der Linien AB und GF der Lage dieser Tangenten gleichfalls desto mehr, je grösser man n nimmt. Es bleibt aber allemahl richtig, wenn ein Punct mit der Geschwindigkeit c, nach der Richtung aB gehet, daß in FG der gesammte Verlust seiner Geschwindigkeit kleiner, als $\frac{ALM^2}{2n} c$ sey. Nun ist der Kreisbogen ADG unter allen diesen gebrochenen Linien die letzte, (466 §. G.) und der Linien aL, gL, letzte Lage ist, mit αT, γt, einerley, so wie der letzte Werth $\frac{ALM^2}{2n}$.

$\frac{ALM^2}{2n} c = o$ wird, wenn $n = \infty$ wird. Daraus folgt der Satz:

Wenn ein Punct sich nach $\propto A$, mit der Geschwindigkeit c bewegt, bey A aber genöthigt wird, in dem Kreisbogen ADG fortzugehen; so wird er mit eben derselben Geschwindigkeit c auch den Kreisbogen durchlaufen, weil der Verlust seiner Geschwindigkeit, wenn er in G ankommt, $= o$ ist. Man kan aber den Kreisbogen ADG so groß, oder so klein annehmen, als man will.

120 §.

Wenn gleich ADG kein Kreisbogen, sondern eine andre krumme Linie wäre; so würden die vorigen Schlüsse sich mit gehöriger Veränderung noch anwenden lassen. Es sey die Linie ADG in n gleiche Theile, bey B, C, D, E, F, getheilt, und man ziehe die Sehnen AB, BC, u. s. f.: so werden nun die äussern Winkel CBL, DCK, u. s. f. der gebrochenen Linie ABCDEFG nicht alle gleich groß seyn. Indessen werden sie alle gegen einander in einem bestimmten endlichen Verhältnisse stehen, und ihre Summe wird dem Winkel ALM gleich seyn, wie groß auch n genommen wird. Wenn nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, u. s. f. diese Winkel nach der Reihe bedeuten, und es bewegt sich, wie vorhin, ein Punct auf dieser gebrochenen Linie von A durch B nach G; so ist der gesammte Verlust der Geschwindigkeit kleiner als $c(\sin v\alpha + \sin v\beta + \sin v\gamma + \text{etc.})$ 118 §.) Es sey η der gröste, und ψ der kleinste unter diesen Winkeln: so ist $n\eta > ALM$, und $n\psi < ALM$, und dies allemahl, wie groß auch n genommen wird; folglich bleibt $n\psi$ allemahl eine endli-

endliche Grösse, so wie $n\eta$. Denn es ist das Verhältniß $n\psi : n\eta = \psi : \eta$ allemahl endlich, und es können beyde Grössen $n\psi$ und $n\eta$ weder zugleich verschwinden; noch zugleich unendlich groß werden, weil in beyden Fällen ALM nicht zwischen diesen Grenzen fallen könnte. Nun ist auch $n \sin v . \eta > (\sin v\alpha + \sin v . \beta + \sin v . \gamma + \text{etc.})$ also der Verlust der Geschwindigkeit kleiner, als $c . n \sin v . \eta$. Hieraus folgt, wie im 119 §, es sey dieser Verlust der Geschwindigkeit $< \frac{(n\eta)^2}{2n} c$. Weiter ist die krumme Linie unter allen den gebrochenen Linien, die zum Vorschein kommen die letzte, wenn n ohne Aufhören wächst. Wird $n = \infty$; so wird ALM = ATt, und dieserwegen muß $n\eta$ auch endlich seyn, woraus $\frac{(n\eta)^2 c}{2n} = 0$ folgt, wie im 112 §. Also verliert der Punct nichts von seiner Geschwindigkeit.

121 §.

Es ist bey diesen Schlüssen vorausgesetzt worden, daß das Verhältniß $\eta : \psi$ allemahl endlich bleibe. Daher fällt der Satz weg, wenn dies Verhältniß unendlich groß wird. Dieser Fall findet allemahl statt, wenn unter den Winkeln α, β, γ, δ, u. s. f. einer, oder mehrere endlich bleiben, wenn die übrigen verschwinden.

153 Fig. Man nehme an, eine krumme Linie, wie AMB in der 153 F. bestehe aus zweyen Stücken AM, und MB, und $_7$Mt berühre den Bogen AM; MT aber den Bogen BM in M, so daß beyde Tangenten den Winkel TMt einschliessen. Nun ändert die krumme Linie bey M ihre Richtung plötzlich; der Punct M,

welcher

welcher durch AM fortgehet, hat, indem er in M ankommt, die Richtung Mτ, und muß nun auf einmahl nach der Richtung MT fortgehen. Fiele MT mit Mt zusammen: so müste der Punct M hieselbst plötzlich die grade entgegengesetzte Richtung annehmen, und der Punct M heist in diesem Fall eine Spitze, oder ein Rückkehrpunct. Ein solcher Punct wäre D in der Linie ABDFG (154 F.), und es fällt leicht in die Augen, daß ein Punct M, der mit der Geschwindigkeit c auf ABCD fortgehet gegen den Punct D grade anstossen werde, und wenigstens nicht allemahl mit derselben Geschwindigkeit wieder zurück, durch DEF fortgehen werde, wofern nicht andre Ursachen, dergleichen die Federkraft der Körper seyn könnte, dies zuwege bringen. Man theile den Bogen AD in gleiche Theile, und trage diese gleichen Theile auch auf den Bogen DFG auf. Nun war in der 152 F. der Winkel IDH ein sehr spitzer Winkel, wie alle übrigen. Hier aber ist IDH ein sehr stumpfer Winkel, und eben dieser Winkel wächst, wenn DE abnimmt, und wird $= i\mathrm{DT} = 180°$, wenn DE verschwindet, da im Gegentheil die übrigen Winkel CBL, DCK, u. s. f. verschwinden. Daher ist nun $n\eta$ unendlich groß, wenn $\mathrm{HDI} = \eta$ gesetzt wird, und $\frac{(n\eta)^2}{2n}$ nicht mehr $= 0$.

154 Fig.

122 §.

So lange demnach der bewegte Punct in dem krummen Wege keine Spitzen antrift, so lange wird seine Bewegung gleichförmig bleiben, und die Krümmung des Weges ändert die Geschwindigkeit nicht. Daraus folgt ferner: wenn eine Kraft den bewegten

wegten Punct beständig nach der Richtung der Tangente der krummen Linie treibt, daß seine Geschwindigkeit eben so werde geändert werden, als wenn derselbe seine Bewegung nach der Richtung der Tangente fortsetzen könnte.

123 §.

Ein Punct also, der mit gleichförmiger Bewegung im Kreise herumgehet, wird diese Bewegung blos wegen seiner Trägheit fortsetzen können, und dafern sonst keine Kräfte auf diesen Punct würken; so wird die Bewegung beständig gleichförmig bleiben.

Wie es möglich sey, einem Körper eine solche Bewegung mitzutheilen, kan man sich füglich so vor-
155 stellen. Ein zarter Faden CM, woran ein kleiner
Fig. Körper M befestigt ist, sey auf einer glatten horizontalen Tafel mit dem andern Ende an einem Stift C so befestigt, daß wenn der Faden grade ausgespannt ist, er sich um den Stift Kreisförmig, ohne sich aufzuwickeln, drehen könne. Nachdem nun der Faden CM grade ausgespannt worden, gebe man dem Körper M einen horizontalen Stoß, senkrecht auf die Länge des Fadens CM: so wird der Körper im Kreise herumlaufen, und wenn die Friction seine Bewegung nicht verzögerte: so würde diese Bewegung beständig gleichförmig bleiben.

124 §.

Wenn der Faden den Körper nicht hielte: so würde derselbe nach mitgetheiltem Stosse in grader Linie nach der Richtung MT dieses Stosses fortgehen, da im Gegentheil, weil der Faden den Körper hält,

diese Richtung sich beständig ändert. Diese Aenderung der Richtung muß von einer bewegenden Kraft herrühren (19 §.) und diese kan hier keine andre seyn, als der Widerstand des Fadens, welcher den Körper hindert, sich vom Mittelpunct C weiter, als um den Abstand CM zu entfernen. Demnach muß der Körper beständig den Faden nach der Richtung CM dehnen, so wie der Faden diesen Körper nach der entgegengesetzten Richtung, nemlich gegen den Mittelpunct C ziehet. Diese Kraft, womit der Körper den Faden nach der Richtung CM dehnet, heist die **Schwungkraft des Körpers** (vis centrifuga).

125 §.

Es ist die Masse des Körpers M gegeben, nebst der Geschwindigkeit c, womit er im Kreise, dessen Halbmesser $CM = r$ ist, herumläuft: man soll die Grösse der Schwungkraft finden. 155 Fig.

Aufl. Es sey der Körper in der Zeit t durch den Bogen AM gelaufen, und in der folgenden Zeit Δt (die man sehr klein annehmen kan), durch den Bogen MN. Durch M sey eine Tangente MT des Kreises gezogen, und NQ auf CM, NR aber auf MT senkrecht gesetzt. Nun ist in der Zeit Δt die Masse M durch den Weg $RN = MQ$ nach der Richtung MC fortgegangen. Deswegen muß in dieser Zeit eine bewegende Kraft den Körper nach dieser Richtung getrieben, und die Bewegung nach dieser Richtung beschleuniget haben. Diese Kraft sey $= P$: so ist ihre Beschleunigung $\frac{gP}{M} = \frac{RN}{dt^2}$ (99 §.) vorausgesetzt, daß man einen Ausdruck finden kön-

ne, der RN durch Δt bestimmt. Es würde nemlich der letzte Werth des Bruchs $\frac{RN}{\Delta t^2}$, derjenige, der herauskommt, wenn $\Delta t = o = dt$ gesetzt wird, $= \frac{gP}{M}$ seyn. Es ist aber $RN = MQ =$

$$\frac{(chord\ MN)^2}{2r} = \frac{(chord\ MN)^2\,(arc\ MN)^2}{2r\,(arc\ MN)^2},$$

und *arc.* $MN = c.\Delta t$, weil dieser Bogen mit der Geschwindigkeit c in der Zeit Δt gleichförmig durchlauffen wird; also ist $RN = \frac{(chord\ MN)^2 cc\,\Delta t^2}{2r\,(arc\ MN)^2}$

und $\frac{RN}{\Delta t^2} = \frac{(chord\ MN)^2 cc}{2r\,(arc.\ MN)^2}$. Für $\Delta t = o$ wird $\frac{chord\ MN}{arc.\ MN} = 1$ (466 §. G.) also $\frac{gP}{M} = \frac{cc}{2r}$!

und $P = \frac{Mcc}{2gr}$. Wenn demnach eine solche Kraft $P = \frac{Mcc}{2gr}$ die Masse M beständig gegen den Mittelpunct triebe: so könnte sie die Kreisbewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit frey fortsetzen, und es wäre kein Faden nöthig, sie zu halten. Nun aber vertritt der Faden die Stelle dieser Kraft; also wird die Masse M mit eben der Gewalt den Faden zu zerreissen streben.

126 §.

Wenn $cc = 2gr$, oder $c = \sqrt{2gr}$ ist, so wird $P = M$; also dehnt die Schwungkraft den Faden in diesem Fall so stark, als wenn ein Gewicht $= M$ frey an

an dem Faden herabhienge. Wenn aber eine schwere Masse von einer Höhe $= \frac{1}{2}r$ frey herabfiele, so würde sie die Geschwindigkeit $\sqrt{2gr}$ durch den Fall erlangen (32 §.) Also ist der Halbmesser des Kreises, worin der Körper herumgehet, doppelt so groß, als die derjenigen Geschwindigkeit zugehörige Höhe, womit der Körper herumlauffen muß, wenn die Schwungkraft der Schwere gleich seyn soll.

In allen übrigen Fällen hat man $P:M = cc:2gr$

$= \frac{cc}{2g}:r$, d. i. es verhält sich die Schwungkraft zur Schwere, wie die doppelte der Geschwindigkeit des Körpers zugehörige Höhe zum Halbmesser des Kreises, worin der Körper herumläuft.

127 §.

Wenn zweene Körper M und m in verschiedenen Kreisen, deren Halbmesser R und r sind, mit den Geschwindigkeiten C und c herumlaufen, und die Schwungkräfte sind P und p; so hat man $P = \frac{M.CC}{2g.R}$, und $p = \frac{m.cc}{2g.r}$, also $P:p = \frac{MCC}{R} : \frac{mcc}{r}$, d. i. das Verhältniß der Schwungkräfte ist aus den Verhältnissen der Massen der Quadrate der Geschwindigkeiten, und dem umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser zusammengesetzt, und dies giebt folgende besondre Sätze:

Bey gleichen Geschwindigkeiten, und in gleichen Kreisen verhalten sich die Schwungkräfte wie die

Massen; bey gleichen Massen, und gleichen Kreisen, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten; bey gleichen Massen, und gleichen Geschwindigkeiten aber verkehrt wie die Halbmesser.

128 §.

Des Kreises Umfang ist $2\pi r$, wenn $\pi = 3,14159$ - - - gesetzt wird (467 §. G.) Weil nun die Bewegung gleichförmig ist: so hat man die ganze Umlaufszeit $t = \frac{2\pi r}{c}$, und $c = \frac{2\pi r}{t}$. Setzt man dies in den Ausdruck $P = \frac{Mcc}{2gr}$ (125 §.); so erhält man $P = \frac{2M\pi^2 r}{gtt}$, und daraus schliest man leicht, es sey bey verschiedenen Massen, und in verschiedenen Kreisen das Verhältniß der Schwungkräfte zusammengesetzt, aus dem Verhältnisse der Massen, der Halbmesser, und dem umgekehrten Verhältniß der Quadrate der Umlaufszeiten.

Soll nun die Schwungkraft der Schwere gleich seyn: so ist $P = M$; also $gtt = 2\pi^2 r$; folglich $t = \frac{\pi\sqrt{2r}}{\sqrt{g}}$, und $r = \frac{gtt}{2\pi^2}$. Diese Gleichung bestimmt also den Halbmesser des Kreises aus der Umlaufszeit, und umgekehrt, wenn die Schwungkraft der Schwere gleich seyn soll.

Der VIII. Abschnitt.

Vom Schwunge der einfachen Pendul.

129 §.

Wenn ein schwerer Punct M an dem einen Ende A eines vollkommen biegsamen, und dabey hinlänglich starken Fadens CA, das andre Ende des Fadens selbst aber an einem unbeweglichen Punct C befestigt ist; so wird der Punct M ruhig hängen, so lange der Faden in der verticalen Lage CA bleibt. Bringt man aber den Faden aus der Lage CA in eine andre Lage CM: so ziehet ihn die Schwere nach der verticalen Richtung MF, und der Faden hält ihn nach der Richtung MC zurück. Weil beyde Kräfte einander nicht grade entgegengesetzt sind: so muß eine Bewegung erfolgen, und zwar wird der Punct M gezwungen, in dem Kreisbogen MAN fortzugehen, dessen Halbmesser CM ist. Wenn man nun das Gewicht des Fadens bey Seite setzt, und allein den äussersten Punct M desselben als einen schweren Punct betrachtet: so heist diese Einrichtung ein einfaches Pendul. Statt des Fadens CM kann man sich auch eine grade unbiegsame Linie vorstellen, die sich um den festen Punct C frey drehen kan, und wovon nur der äusserste Punct M schwer ist. Um dieser Untersuchung die völlige Allgemeinheit zu geben, kan man überhaupt annehmen, eine beständige Kraft =P, treibe den Punct M nach der Richtung MF, mit CA parallel, ohne eben vorauszusetzen, daß P das natürliche Gewicht des Puncts M sey. 156 Fig.

130 §.

156 Fig. Die Kraft P, welche den Punct M nach der Richtung MF treibt, ist gegeben, nebst dem Winkel $ACB = \alpha$, um welchen das Pendul gehoben worden: man sucht die Geschwindigkeit c des Puncts M, nachdem dieser Punct den Bogen BM durchlaufen ist, vorausgesetzt, daß man ihn in B habe frey fallen lassen.

Aufl. Man ziehe durch M die Tangente MT, und verlängere CM bis G: so zerlegt sich die Kraft P nach der Richtung MF, in zwo andre, nemlich $P\cos\varphi$, nach der Richtung MG, und $P\sin\varphi$, nach der Richtung MT, wenn $ACM = \varphi$ gesetzt wird. Jener Würkung wird durch den Widerstand des Fadens völlig aufgehalten; diese aber beschleunigt die Bewegung des Puncts M nach der Richtung MT, und man weiß aus dem 122 §, daß die Geschwindigkeit in M sich eben so ändre, als wenn der Punct sich auf der Tangente MT bewegte. Nun sey $BM = s$; so hat man $2cdc = \frac{4gl'\sin\varphi}{M} ds$ (112 §.).

Man ziehe MP und mp auf CA senkrecht, und mp schneide MT in μ, MF aber in n: so ist der Winkel $\mu MP = \varphi = M\mu n$, also $\sin\varphi = \frac{Mn}{M\mu} = \frac{Pp}{M\mu}$,

und $2cdc = \frac{4gP.Pp}{M.M\mu} ds$. Dieser Ausdruck ist allemahl richtig, wie klein auch Mm, also auch Pp und $M\mu$ genommen werden. Es ist aber $Mm = \Delta s$, und der Bruch $\frac{\Delta s}{M\mu}$ nähert sich der Grenze $= 1$, wenn Δs, also auch $M\mu$ abnimmt, und es ist der

letzte

letzte Werth $\frac{ds}{M\mu} = 1$. Setzt man nun $DP = x$, also $Pp = \Delta x$: so erhält man $2cdc = \frac{4gP}{M} . Pp = \frac{4gP}{M} dx$, weil Pp mit Δs und $M\mu$ zugleich verschwindet. Folglich wird $cc = \frac{4gP}{M} x + B$ (110§). Aber wenn $x = DP = 0$ ist, so ist $c = 0$; also ist $B = 0$, und $cc = \frac{4gP}{M} DP$, folglich $c = 2\sqrt{\frac{gP}{M}} DP$.

Nun ist $DP = DA - AP$, $AD = a \sin v\alpha$, $AP = a \sin v\varphi$, wenn $CA = CM = a$ gesetzt wird; also $DP = a(\sin v\alpha - \sin v\varphi) = a(\cos\varphi - \cos\alpha)$ folglich $c = 2\sqrt{\frac{agP}{M}} (\cos\varphi - \cos\alpha)$; und weil $\cos\varphi - \cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)$ (451 §. G.), so ist auch $c = 2\sqrt{\frac{2agP}{M}} . \sin\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)$.

131 §.

Wenn M den untersten Punct A erreicht: so ist $\varphi = 0$, also $\cos\varphi = 1$, und $c = 2\sqrt{\frac{agP}{M}} (1 - \cos\alpha) = 2\sqrt{\frac{agP}{M}} \sin v\alpha$. Demnach würde M mit dieser Geschwindigkeit nach der Richtung At fortgehen, wenn der Faden solches nicht hinderte. Es muß vielmehr M seine Bewegung in dem Bogen AN fortsetzen. Rückt nun M über A hinaus nach N; so

wird der Winkel φ negativ, und $ACN = -\varphi$. Da nun eines negativen Winkels Cosinus positiv bleibt, so ist auch die Geschwindigkeit in $N = 2\sqrt{\frac{agP}{M}}$ $(\cos\varphi - \cos\alpha)$. Zwischen B und A wächst die Geschwindigkeit weil $\cos\varphi$ wächst, indem φ abnimmt. Sie ist in A am grösten, weil für $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$, den grösten Werth hat. Auf der andern Seite von A nimmt die Geschwindigkeit wieder ab, weil $\cos\varphi$ abnimmt, wenn φ wächst. Wenn $ACM = ACN$ ist: so sind die Geschwindigkeiten gleich. Wird $ACN = ACE = \alpha$; so wird $c = 0$. Demnach steigt der Punct M auf dieser Seite so hoch, als er auf der andern Seite gefallen war. Man kan nicht $\varphi > \alpha$ nehmen, weil sonst $\cos\alpha > \cos\varphi$ seyn würde, und dies giebt für c einen unmöglichen Werth. In dem Augenblick also, da M in E ankommt, wird die Kraft P diesen Punct wieder zurücke treiben, und er wird dieselbe Bewegung durch N, A, M, bis B wiederholen. Auf solche Art würde sich also das Pendul beständig hin und her schwingen, wenn die hier angenommenen Voraussetzungen in der Natur statt hätten. Weil aber kein Faden so biegsam ist, daß er die Bewegung nicht einigermassen aufhalten sollte; weil man ferner bey würklichen Versuchen statt des Puncts M einen Körper nehmen muß, der einige Grösse hat, und dessen Bewegung der Widerstand der Luft verzögert: so wird kein solches Pendul, dergleichen man in der Natur darstellen kan, die Bewegung ohne Aufhören fortsetzen. Hier konnten inzwischen nicht gleich anfangs alle diese Hinderniße der Bewegung in Betrachtung gezogen werden, und hier ist auch eigentlich noch die Frage nur diese: was

erfol=

erfolgen würde, wenn keine dergleichen Ursachen, wie die Friction, und der Widerstand der Luft ist, vorhanden wären, welche die Bewegung hindern können.

132 §.

Fiele der Punct M in der Verticallinie DP herunter; so würde in P ebenfalls seine Geschwindigkeit = $2\sqrt{\frac{gP}{M}}$ DP seyn (56 §.) Also erlangt der Punct M durch den Fall in dem Bogen BM eben die Geschwindigkeit, die derselbe erlangen würde, wenn er von B bis in die durch M gezogene Horizontallinie frey herabfiele. Es ist dies eine allgemeine Eigenschaft aller krummen Linien, wenn sie keine Spitzen, oder Rückkehrpuncte haben.

Bey allen solchen Linien findet der 122 §. seine Anwendung, und bey den Schlüssen des 130 §, welche auf die Gleichung $cc = \frac{4gP}{M}$ DP führten, ist eigentlich nichts vorausgesetzt worden, was die Sache auf den Kreis einschränkte; dies einzige ausgenommen, daß der Winkel $\mu MP = ACM$ sey. Aber die Betrachtung des letztern ACM kan ganz wegbleiben, und es ergeben sich eben diese Schlüsse, daß $cc = \frac{4gP}{M}$ DP sey. Die beyden andern hier ausgeschlossenen Ausdrücke, sind auf die Bewegung des Penduls im Kreisbogen eingeschränkt.

133 §.

Wenn der Winkel *ACB*, um welchen das Pendul im Anfange gehoben worden, sehr klein

klein ist: die Zeit t zu finden, worin dasselbe einen Schwung durch BAE vollendet.

Aufl. Es war die Kraft, welche den Punct M nach der Richtung MΓ treibt, $= P \sin\varphi$ (130 §). Wenn nun α, also auch φ sehr klein ist: so ist beynahe $\sin\varphi = \varphi$, und die Kraft nach $MT = P\varphi = \frac{P.AM}{CM}$ (472 §. G.) $= \frac{P(AB-BM)}{CM} = \frac{P.AB}{a} - \frac{P.s}{a}$, wenn $BM = s$ gesetzt wird, und es wird die Beschleunigung $V = \frac{g.P.AB}{a.M} - \frac{g.P.s}{a.M}$.

Wenn man nun eine Linie verzeichnet, der die Gleichung $V = \frac{g.P}{a.M}(AB - s)$ zugehört, so daß $s = BM$ (157 F.) die Abscisse, und $V = MN$ die zugehörige Ordinate wird: so erhält man eine grade Linie (89 §) weil P constant ist. Diese Linie sey CA: so ist $V = BC = \frac{gP}{aM} AB$, wenn $s = BM = 0$ ist, und $V = 0$, wenn $s = BA$ gesetzt wird, wo die graden Linien BM und BA (157 F.) mit den Kreisbogen BM und BA (156 F.) gleiche Länge haben müssen. Nun erhält man $cc = 4BCNM$ (116 §) $= 2(BC + MN) \times BM$ (280 §. G) $= 2\left(\frac{2gP}{aM}.AB - \frac{gPs}{aM}\right)s = \frac{2gP}{aM}(2AB.s - ss)$. Aus dem Mittelpuncte A mit dem Halbmesser AB sey ein Kreis BHK verzeichnet, und MN bis an den Kreis in H verlängert: so

157 Fig.

ist

ist $HM^2 = 2AB.s - ss$, folglich $cc = \frac{2gP}{a.M}.HM^2$,

und $c = HM\sqrt{\frac{2gP}{aM}}$. Nun ist $dt = \frac{1}{c}ds$, und

$t = \int\frac{1}{c}ds$ (113§.) Es wachse also $BM = s$ um das Stück $Mm = \Delta s$, und durch m sey mit HN eine Parallele gezogen, welche den Kreis in h, und die Tangente HT des Kreises in t schneidet: überdem sey HR auf mh senkrecht; so ist $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} =$

$\frac{1}{HM}.\sqrt{\frac{a.M}{2gP}}$, wenn Mm verschwindet. Der Kürze wegen setze man $\sqrt{\frac{a.M}{2gP}} = k$: so ist $\frac{dt}{ds}$

$= \frac{k}{HM}$. Nun ist das Dreyeck HMA ∽ Dr. HRt, also $AH:HM = Ht:HR$, und $HR = Mm$

$= \Delta s = \frac{HM.Ht}{AH}$, folglich $\frac{\Delta s}{Ht} = \frac{HM}{AH}$.

Je kleiner nun $Mm = \Delta s$ genommen wird, desto mehr nähern sich Ht und Hh einander, und wenn man $BH = z$ setzt, also $Hh = \Delta z$: so wird

$\frac{ds}{dz} = \frac{HM}{AH}$. Nun war $\frac{dt}{ds} = \frac{k}{HM}$,

also erhält man $\frac{dt}{dz} = \frac{k}{AH}$, und $dt = \frac{k}{AH}dz$,

folglich $t = \frac{k}{AH}z = \frac{k}{AH}$ BH (110§) wo kei-

ne

ne beständige Grösse zugesetzt wird, weil $z = o$ seyn muß, wenn $t = o$ ist. Wenn nun $s = BE = Bog.$ BAE (156 F.) wird, so ist $BH = BKE = \pi . AH$; folglich ist die Zeit des Schwunges von B bis E (156 F.) $= \pi . k = \pi \sqrt{\frac{'aM}{2gP}}$, oder $= \pi \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}}$, wenn man $\frac{P}{M}$, als der Kraft P Beschleunigung $= p$ setzt.

Für die natürliche Schwere ist $P = M$, also die Zeit des Schwunges $= \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$.

134 §.

Man muß sich daran erinnern, daß dieser Ausdruck die Zeit des Schwunges nicht völlig genau, aber desto richtiger ausdrücke, je kleiner die Bogen sind, die das Pendul beschreibt: denn desto richtiger wird die Voraussetzung, worauf sich die Rechnung gründet, daß nemlich der sin AB = Bog. AB sey. Wenn man die Zeit genau berechnen wollte: so müste man statt

156 Fig.

der Gleichung $V = \frac{g.P.AM}{M.a}$, eigentlich $V = \frac{g.P}{M.a}$ sin AM, für die Scale der Beschleunigungen nehmen: oder $V = \frac{g.P}{M.a}$ sin (AB − s), wenn $s =$ BM ist. Wie aber diese Linie sich quadriren lasse, kan hier noch nicht gewiesen werden, und von dieser Quadratur würde der Ausdruck für *cc* abhängen, daraus dann ferner *t* gesucht werden müste. Wenn

AD

$AD = b$ ist, so findet man durch Hülfe der Integralrechnung, (wie in der Folge bey weiterer Ausführung der Mechanik wird gewiesen werden) es sey die eigentliche Zeit des Schwunges durch den Bogen

$$BAE = \pi \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}} \left(1 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^3 \text{-------} \cdot \left(\frac{1.2.3.5 \text{---} (2n-1)}{2.4.6 \text{---} 2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^n \text{----}\right)$$

woraus $\pi \sqrt{\frac{a}{2gp}}$ wird, wenn b verschwindet, wie der vorigen Rechnung gemäß ist, wo $p = \frac{P}{M}$ war. Man findet den Beweis in H. Eulers Mechanica T. II. §. 161 - 164. und in H. Hofr. Kästners Anfangsgr. der höhern Mechanik 2 Abschn. 32. 33 §. 197 - 199 S. In der Reihe, womit man $\pi \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}}$ multipliciren muß, ist jedes folgende Glied sehr viel kleiuer, als das vorhergehende, weil $b < 2a$ ist, und die Coefficienten der Potenzen von $\frac{b}{2a}$ ebenfalls eigentliche Brüche sind. Daher wird bey kleinen Schwingungen die Zeit eines Schwungs $= \frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{2gp}} \left(1 + \frac{b}{8a}\right)$. Man kan so reden: es sey $\frac{\pi \sqrt{a}}{\sqrt{2gp}}$ die Zeit eines unendlich

kleinen

kleinen Schwunges; aber man muß nie vergessen, daß ein unendlich kleiner Schwung gar keine Bewegung mehr sey. Eigentlich sollte man sagen: die Zeit eines Schwunges durch BAE sey nie kleiner, als $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}}$, und eine Zeit $= \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}}$ sey die Grenze, der die Zeit eines Schwunges immer näher kommt, je kleiner der Bogen des Schwunges wird.

135 §.

156 Fig. Man misst am bequemsten die Grösse des Schwunges vermittelst der Sehne BE des Bogens BAE. Wenn nemlich das Pendul an einer lothrechten Tafel hängt, worauf die Verticallinie CA verzeichnet ist, und man hat das Pendul bis B gehoben: so kan man BD, also auch $BE = 2BD$ messen. Daraus läst sich denn $AD = b$ trigonometrisch berechnen, wenn die Länge CA des Penduls ebenfalls gemessen ist. Wird nun ein Pendul auf solche Art in Bewegung gesetzt: so kan man während einer gewissen Zeit z. E. von einer Stunde die Schwingungen zählen, und hierauf diese Zeit durch die gefundene Anzahl der Schwingungen dividiren: so hat man die Zeit eines Schwunges für ein Pendul von einer bestimmten Länge. Wenn man nun diese Zeit $= T$ setzt: so hat man für die natürliche Schwere $T = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{b}{2a} + \frac{9}{64}\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ ---}\right)$, weil $p = 1$ ist: und wenn t die Zeit des unendlich kleinen Schwungs für eben das Pendul ist; so hat man $t = \frac{T}{1 + \frac{b}{8a} + \text{etc.}}$.

136 §.

136 §.

Wenn zwey Pendul eine verschiedene Länge haben, und sich durch ähnliche Bogen schwingen; so ist in dem Ausdruck für die Zeit des Schwunges der Quotient $\frac{b}{a}$ für beyde einerley. Wenn demnach a des einen; und A des andern Länge ist; so verhalten sich die Zeiten des Schwunges, wie $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}} : \frac{\pi\sqrt{A}}{\sqrt{2gp}}$, folglich wie $\sqrt{a} : \sqrt{A}$, oder, wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendul, wenn p für beyde einerley ist, wie bey der natürlichen Schwere. Eben so verhalten sich die Zeiten des unendlich kleinen Schwunges dieser Pendul. Deswegen ist man gewohnt, nur diese Zeiten unendlich kleiner Schwingungen, bey verschiedenen Penduln zu vergleichen, und überhaupt durch die Oscillations-Zeit eines Penduls die Zeit des unendlich kleinen Schwunges zu verstehen.

Aber bey einerley Länge a der Pendul und verschiedenen Kräften verhalten sich die Oscillations-Zeiten verkehrt, wie die Quadratwurzeln der Beschleunigungen. Wenn nemlich die Beschleunigung der einen Kraft p; der andern $= q$ ist: so verhalten sich die Oscillations-Zeiten, wie

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}} : \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2gq}} = \frac{1}{\sqrt{p}} : \frac{1}{\sqrt{q}} = \sqrt{q} : \sqrt{p}.$$

Wird endlich das Pendul, dessen Länge A ist, von einer Kraft, deren Beschleunigung $= q$ ist, bewegt:

so verhalten sich die Oscillationszeiten, wie $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}}$: $\frac{\pi\sqrt{A}}{\sqrt{2gq}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{p}} : \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{q}}$ und bey gleichen Oscillationszeiten ist $\sqrt{a} : \sqrt{A} = \sqrt{p} : \sqrt{q}$; oder $a : A = p : q$, d. i. die Beschleunigungen verhalten sich, wie die Längen der Pendul.

Wenn man demnach aus einer angestellten Beobachtung die Oscillationszeit eines Penduls von bekannter Länge nach dem 135 §. gefunden hat: so ergiebt sich durch eine leichte Rechnung vermöge des ersten hier bewiesenen Satzes, die Länge eines Penduls, das Secunden schlägt. Die Länge des bey der Beobachtung gebrauchten Penduls sey $= a$; seine Oscillationszeit $= t$, die Länge des Secunden-Penduls $= l$: so hat man t Sec : 1 Sec. $= \sqrt{a} : \sqrt{l}$

also $tt : 1 = a : l$, und $l = \frac{a}{tt}$. Wäre also die Anzahl der Oscillationen während einer Stunde $= n$, aus der Beobachtung gefunden: so erhielte man die Zeit einer Oscillation $t = \frac{3600}{n}$, also $l = \frac{n^2 a}{12960000}$.

Der

Der IX. Abschnitt.

Von der Schwungbewegung fester Körper um eine unbewegliche Axe.

137 §.

Eine grade unbiegsame Linie CN drehe sich Kreis- 158
förmig um den festen Punct C in der Ebene Fig.
BCA: so wird jeder Punct M dieser Linie in einem eigenen Kreise herumgehen, der von denjenigen unterschieden ist, worin die übrigen in eben der Zeit herumlaufen. Wenn einer von den Puncten dieser Linie mit gleichförmiger Bewegung fortgeht, so ist die Bewegung aller übrigen auch gleichförmig: und wenn nur die Geschwindigkeit eines dieser Puncte bekannt ist; so ist die Geschwindigkeit aller übrigen bekannt.

Dafern nemlich M in der Zeit t den Bogen MA gleichförmig durchläuft, so geht N in eben der Zeit gleichförmig durch den ähnlichen Bogen ND. Des Puncts M Geschwindigkeit ist $= \frac{MA}{t}$, und des Puncts N Geschwindigkeit $= \frac{ND}{t}$; beyder Verhältniß aber $MA : ND = CA : CD$. Daher verhalten sich die Geschwindigkeiten verschiedener Puncte in dieser Linie, wie ihre Entfernungen vom Bewegungspunct C.

138 §.

Wenn CK = 1 ist, und man setzt den Bogen KL = φ; so ist MA = CM. φ, ND = CN. φ u. s. f. und die Geschwindigkeit eines jeden Puncts M ist = $\frac{\varphi}{t}$ CM. Es ist aber φ das Maaß des Winkels MCA, den die Linie CM in der Zeit t beschreibt (472 §. G.) Weil nun CM sich nicht ändert, so lange eben derselbe Punct M verstanden wird; so wird bey einer gleichförmigen Umdrehung der Winkel φ der Zeit proportional seyn: und je grösser dieser Winkel in einer gegebenen Zeit, z. E. einer Secunde ist, desto schneller wird sich die Linie drehen. Demnach kan man die Schnelligkeit der Umdrehung durch die Grösse desjenigen Winkels bestimmen, durch welchen die Linie CM in einer Secunde herumgehet. Es heist derselbige hier die **Winkel-Geschwindigkeit**, oder **Umdrehungs-Geschwindigkeit** der Linie CM. Wenn t in Secunden ausgedrückt ist; so giebt $\frac{\varphi}{t}$ diese Winkel-Geschwindigkeit. Weil nemlich bey gleichförmiger Umdrehung die Winkel der Zeit proportional sind: so hat man $t : 1 = \varphi$ zum Winkel, der in einer Secunde zurückgelegt wird, welcher also = $\frac{\varphi}{t}$ seyn muß.

Ist die Winkel-Geschwindigkeit der Linie CN bekannt: so wird die wahre Geschwindigkeit eines jeden ihrer Puncte M gefunden, wenn man die Winkel-Geschwindigkeit in die Entfernung des Puncts *M* vom Bewegungspunct multiplicirt: so wie man umgekehrt, aus der wahren

Geschwindigkeit eines Puncts M die Winkel-Geschwindigkeit findet, wenn man jene durch die Entfernung des Puncts *M* vom Bewegungspunct, dividirt.

139 §.

Man betrachte jeden Punct der graden Linie CN als eine sehr kleine körperliche Masse, ohne Schwere, und nehme an, es sey der Linie CN eine Kreisbewegung um den festen Punct C mit einer gewissen Winkel-Geschwindigkeit $= \gamma$ mitgetheilt worden: so erhellet, daß diese Umdrehung beständig gleichförmig bleiben werde, dafern keine bewegende Kräfte darinnen eine Aenderung machen. Jeder Punct M geht nun mit der Geschwindigkeit $\gamma . CM$ gleichförmig im Kreise herum, und würde, wenn er allein wäre, diese Bewegung beständig fortsetzen (123 §). Alle diese körperlichen Puncte aber würden für sich beständig in der graden Linie bleiben, wenn sie gleich nicht als Theile eines festen Körpers zusammenhiengen, dafern sie nur sonst auf eine andre Art gehindert würden, sich vom Mittelpunct C zu entfernen. Deswegen kan auch aus dem Zusammenhange dieser Puncte, nichts erfolgen, das die Gleichförmigkeit dieser Bewegung änderte. 158 Fig.

Vermöge dieser Umdrehung aber bekommt jeder Punct M eine Schwungkraft, womit er sich von dem Punct C zu entfernen strebet, und diese ist für jeden

$$\text{Punct M} = \frac{\gamma\gamma . CM^2 . M}{2g . CM} \text{ (125 §)} = \frac{\gamma\gamma}{2g} CM.$$

M. Dafern die Linie CN sich über den Punct C hinaus nach H erstreckt: so gelten die bisherigen Schlüsse auch für diejenigen körperlichen Puncte, die

sich in CH befinden. Es bekommt auch jeder von diesen Puncten eine Schwungkraft, womit er sich von dem Punct C zu entfernen strebt, aber nach der Richtung CH, die der vorigen CN entgegengesetzt ist. Daher leidet der Punct C eine Gewalt, die so groß ist, als die Differenz der Schwungkräfte auf beyden Seiten des Puncts C, welche in dem Verstande des 2 §. der A. R. die Summe aller Schwungkräfte heissen kan, dafern man die eine Summe in Ansehung der andern, als negativ betrachtet. Wenn demnach die Summe der Schwungkräfte auf beyden Seiten gleich; oder die Summe aller, in dem eben angezeigten Verstande, = o wäre: so würde der Punct C gar keine Gewalt leiden.

Wenn H, K, M, N, die Massen der mit diesen Buchstaben bezeichneten körperlichen Puncte bedeuten: so wäre die Summe aller ihrer Schwungkräfte

$$= \frac{\gamma\gamma}{2g}(CK.K + CM.M + CN.N - CH.H).$$

Es sey G der gemeinschaftliche Schwerpunct der Massen, H, K, M, N, (wenn man in der ganzen Mechanik gewöhnlich ist, nun durch diese Massen ihre Gewichte verstehet, die sie nahe an der Oberfläche der Erde haben würden (55 §)) so ist $CG(H+K+M+N) = CK.K + CM.M + CN.N - CH.H$; (42 §. St.) also die Summe aller Schwungkräfte

$$= \frac{\gamma\gamma}{2g} CG(H+K+M+N).$$

Man bringt allemahl einen ähnlichen Ausdruck heraus, es mögen so viele Puncte dieser Linie, als man will, körperliche Massen seyn: und wenn $\int M$ Kürze halber die Summe aller Massen bezeichnet; so wird jedesmahl

die

die gesammte Schwungkraft $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$ CG . $\int$M.

Wären alle Massen im Schwerpunct vereinigt; so würde diese ganze Masse bey eben der Umdrehungs-Geschwindigkeit eben die Schwungkraft bekommen. Die gesammte Schwungkraft aller Puncte ist also dem Abstande des Schwerpuncts vom Bewegungspunct proportional, und ist $= 0$, wenn der Bewegungspunct mit dem Schwerpunct einerley ist. Demnach kan sich die Linie um den Schwerpunct drehen, ohne daß es nöthig wäre, diesen Punct zu halten.

140 §.

Es ist *HN* eine sehr dünne cylindrische, oder prismatische Stange, die man in dem Verstande des 69 §. St. als eine körperliche Linie betrachten kan. Ihre Masse *M* ist gegeben, und durch eine Function ihrer Länge ausgedrückt: man sucht den Schwerpunct dieser Linie. 158 Fig.

Aufl. Es sey M ein unbestimmter Punct dieser Linie, und $CM = x$; die ganze Masse der Linie HM sey $= M$: so erhellet, wenn CM um ein kleines Stück $Mm = \Delta x$ anwächst, daß M um die Differenz ΔM wachse. Wäre nun die kleine Masse ΔM ganz in dem Punct M beysammen: so wäre ihr Moment, womit sie diese Linie um C zu drehen strebet $= x\Delta M$, und wenn man sich die ganze Linie in lauter kleine Massen von eben der Länge eingetheilt vorstellt, statt x aber nach und nach alle Entfernungen dieser Massen von C setzt, mit der Voraussetzung, daß jedesmahl die ganze Masse ΔM im äussersten Punct der

Entfernung x vereinigt sey: so giebt die Summe aller Producte $x\Delta M$ das ganze Moment der Linie HN desto richtiger, je kleiner Δx genommen wird: das wahre Moment ist die letzte aller dieser Summen, worauf man kommt, wenn Δx verschwindet. Diese letzte Summe giebt die Integralrechnung (109. 114 §) und dies ganze Moment wird $= \int x dM$. Wenn nun G der Schwerpunct ist; so hat man CG. $M = \int x dM$ (42 §. St.) folglich $CG = \frac{\int x dM}{M} = \frac{\int x dM}{\int dM}$.

Man kan sich also jeden Punct der Linie HN als ein unendlich kleines Gewicht vorstellen, so ist auch diese Auflösung unter der allgemeinen Regel des 42 § St. begriffen. Man findet auf diese Art eigentlich die mittlere Richtung aller dieser unendlich kleinen Gewichte; diese muß nemlich durch den Punct G durchgehen. Uebrigens weiß man, daß diese Richtung vertical, oder mit den Richtungen aller unendlich kleinen Gewichte parallel sey.

Es erhellet hiebey sehr leicht, daß diese Auflösung nicht blos auf die eigentlich so genannten Gewichte eingeschränkt sey, wie auch bereits im 42 §. Stat. erinnert worden. Wenn auf jeden Punct dieser Linie eine Kraft drückte, so daß der gesammte Druck auf die ganze Linie sich durch eine Function von x ausdrücken liesse; alle Puncte aber nach parallelen Richtungen gepreßt würden: so könnte man auf eben die Art den Punct G finden, durch welchen die mittlere Richtung aller dieser Pressungen durchgehet. Ist P der gesammte Druck auf HM: so geht die mittlere

Rich-

Richtung des Drucks durch G, wenn man CG = $\frac{\int x dP}{P}$ nimmt.

141 §.

Eine solche körperliche grade Linie (die hier aber ohne Schwere betrachtet wird) drehet sich gleichförmig um den festen Punct C mit der Winkel-Geschwindigkeit γ, und es ist ihre Masse durch eine Function ihrer Länge bekannt: man soll die Grösse der gesammten Schwungkraft finden. 158 Fig.

Aufl. Es sey M ein unbestimmter Punct dieser Linie, und CM = x; die Masse der Linie HM aber = M. Wenn nun, wie im vor. §. $Mm = \Delta M$ ein kleines Stück dieser Linie, und dessen Länge = Δx ist: so wäre die Schwungkraft dieser Masse = $\frac{\gamma\gamma}{2g} x\Delta M$, wenn diese ganze Masse in M beysammen wäre. Stellt man sich eben so, wie im vor. § die Linie HM in lauter Theile, von eben der Länge eingetheilt, vor; und setzt statt ΔM eines jeden Masse, statt x aber eines jeden Abstand von C: so wäre die Summe aller der Schwungkräfte dieser Massen der gesuchten Schwungkraft der ganzen Linie gleich, dafern die angenommene Voraussetzung bey jeder dieser Massen richtig wäre. Indessen giebt diese Summe die gesuchte Schwungkraft desto richtiger, je kleiner Δx genommen wird; und die wahre Schwungkraft ist die letzte aller dieser Summen, die man erhält, wenn Δx verschwindet. Daher findet man vermittelst der Integralrechnung die gesammte Schwung-

Kraft $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int x d\mathrm{M}$. Wenn aber G der Linie Schwerpunct ist: so ist $\int x d\mathrm{M} = \mathrm{CG}.\mathrm{M}$ (140 §); also wird die gesuchte Schwungkraft $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \mathrm{CG}.\mathrm{M}$.

Daher ist die gesammte Schwungkraft eben so groß, als sie seyn würde, wenn die gesamte Masse im Schwerpunct vereinigt wäre, und die übrigen, dem 139 §. beygefügten Folgen gelten ebenfalls von jeder körperlichen Linie. Man kan sich übrigens in jedem Punct derselben eine unendlich kleine Masse vorstellen, die durch die Umdrehung eine unendlich kleine Schwungkraft bekommt, und diese Redensarten in ähnlichen Fällen zur Verkürzung der Rechnung brauchen.

Wegen dieser Schwungkräfte leidet also der Zusammenhang, oder die Festigkeit der Theile eine gewisse Gewalt. Ist N die Masse des äussersten Theilchens dieser Linie: so strebt N mit der Gewalt $\frac{\gamma\gamma}{2g} \mathrm{CN}.\mathrm{N}$ nach Nv fortzugehen, und eben so jeder andre Punct. Demnach wird die Summe aller Schwungkräfte der Puncte, die sich von N bis M erstrecken, die Gewalt ausdrücken, welche die Linie in M leidet. Diese Gewalt ist demnach in einer gegebenen Stelle desto grösser, je näher diese Stelle bey dem Bewegungspuncte C liegt, und in C selbst ist sie am grösten. Der Ausdruck $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int x d\mathrm{M}$ giebt diese Gewalt, wenn man die beständige Grösse so bestimmt, daß dies Integral $= 0$ wird, wenn $x = 0$ ist. Daher muß die absolute Festigkeit (179 §. St.)

dieser

dieser Linie bey C so stark seyn, daß sie ein Gewicht tragen kan, welches dieser Schwungkraft gleich ist.

142 §.

Es sey nun ADBI eine ebene Fläche, und EF eine auf dieser Ebene senkrecht so befestigte grade Linie, daß sich die Ebene um diese Linie als eine feste Axe drehen kan, wenn sie gehörig gehalten wird. Alle Puncte H, K, M, N, u. s. f. dieser Ebene werden in Concentrischen Kreisen herumgehen, deren Mittelpunct C ist, und alle diejenigen, welche von C gleich weit entfernt sind, werden sich in einerley Kreisen drehen. Wenn nun die Bewegung aller Puncte gleichförmig ist: so gehen alle diejenigen, die von C gleich weit entfernt sind, mit gleicher Geschwindigkeit herum, und die Geschwindigkeit der übrigen, die von der Axe ungleich weit abstehen, verhalten sich, wie ihre Entfernungen von der Axe. Dafern M in der Zeit t den Bogen Mm, und N zugleich den Bogen Nn beschreibt: so sind die Geschwindigkeiten beyder Puncte $\frac{Mm}{t}$, und $\frac{Nn}{t}$. Aber die Winkel MCm, und NCn sind für beyde einerley. Setzt man also MCm = NCn = φ: so sind die Geschwindigkeiten $\frac{\varphi . CM}{t}$, und $\frac{\varphi . CN}{t}$, die sich wie CM : CN verhalten. Man kan demnach, wie im 138 §. $\frac{\varphi}{t}$ die Winkel-Geschwindigkeit der Ebene ABDI nennen. Und wenn t in Secunden ausgedrückt wird: so ist dies der Winkel, um welchen jede Linie, wie CM, in einer Secunde wegrückt. 159 Fig.

Dafern

Dafern nun H, K, M, N, u. s. f. sehr kleine körperliche Massen sind: so erhellet, wenn der Ebene eine gewisse Winkel-Geschwindigkeit γ einmahl mitgetheilet worden, daß sie diese Bewegung beständig behalten und die Umdrehung gleichförmig fortsetzen werde, wenn keine Kräfte vorhanden sind, die hierinnen eine Aenderung machen. Aus dem Zusammenhang der Puncte kan nichts erfolgen, das diese Gleichförmigkeit stöhrte, weil jeder Punct für sich, auch ausser dem Zusammenhang mit den übrigen, sich eben so bewegen würde, dafern nur etwas da wäre, das diese Puncte hinderte, sich wegen der Schwungkräfte von C zu entfernen: wie wenn jeder Punct für sich vermittelst eines Fadens, oder etwas dergleichen, an C befestiget wäre. Wegen der Schwungkraft aber, die jeder Punct durch diese Umdrehung bekommt, leidet die Axe in dem Puncte C eine gewisse Gewalt, deren Stärke und Richtung sich nach den Gesetzen der Statik bestimmen läst.

143 §.

159 Fig. Es ist eine Gleichung für die Linie *ADBI* gegeben, die eine gewisse Ebene, entweder ganz; oder zum Theil einschliest: man soll den Schwerpunct dieser Ebene finden.

Aufl. Wenn AB und DI die beyden Axen sind, womit die Coordinaten parallel genommen werden: so sey SP mit DI parallel, und $CP = x$, $PM = y$, da dann M ein unbestimmter Punct der Ordinate PS ist. Bey M stelle man sich, wie im 114 §, ein kleines Parallelogramm $M\alpha\mu\beta$ vor, dessen Seiten unbestimmt durch Δx und Δy ausgedrückt sind, und

die

die Masse desselben sey $= \Delta M$. Wäre nun diese ganze Masse in M beysammen, und der Coordinatenwinkel $BCD = \alpha$: so wären $x\Delta M \sin\alpha$, und $y\Delta M \sin\alpha$ dieser kleinen Masse Momente gegen DI und AB (62 §. St.) Wäre ferner CP in lauter gleiche Theile getheilt, und jeder derselben $= \Delta x$ genommen, PM aber so getheilt, daß die Theile den zugehörigen Δy gleich geworden; überdem die ganze Ebene in solche kleine Parallelogramme, wie im 114 §. vertheilt, und vom Schwerpunct G die Linie GR mit DI parallel gezogen: so würde die Summe aller Producte $x\Delta M$ dem Producte CR.M, desto näher kommen, wenn statt ΔM die Masse eines jeden dieser Parallelogramme, und statt x die zugehörige Abscisse gesetzt würde, je kleiner Δx und Δy genommen würden (63 §. St.) Das Product CR.M ist die Grenze, der sich die Summe der Producte $x\Delta M$ ohne Aufhören nähert, so daß CR.M, die letzte dieser Summen ist, und $\int x dM = CR.M$ wird. Es erhellet eben so, daß man $\int y dM = RG.M$ erhalte; folglich ist $CR = \frac{\int x dM}{M}$, und $RG = \frac{\int y dM}{M}$.

Daher kan man sich auch hier jeden Punct der Ebene als ein unendlich kleines Gewicht vorstellen, das der Masse des verschwindenden; oder unendlich kleinen Parallelogramms $dxdy \sin\alpha$, proportional ist, und so ist diese Auflösung als ein besondrer Fall der allgemeinen Auflösung des 63 §. St. zu betrachten. Man findet aber auf diese Art eigentlich den Punct G, durch welchen die mittlere Richtung aller unendlich kleinen Gewichte, die einander insgesammt parallel sind, durchgehet. Daher erstreckt sich dies Verfahren wiederum auf alle Fälle, wenn alle Puncte

rte der Ebene nach parallelen Richtungen gedrucke werden, und der gesammte Druck P auf ein unbestimmtes Stück dieser Ebene sich durch eine Function ihrer geometrischen Grösse ausdrücken läst. Gehe nemlich die mittlere Richtung durch G: so ist $CR = \frac{\int x\,dP}{P}$, und $RG = \frac{\int y\,dP}{P}$.

144 §.

159 Fig. Eine Ebene *ADBI* dreht sich gleichförmig um die auf ihr senkrechte Axe *EF*, mit der Winkelgeschwindigkeit γ. Die Puncte *H*, *K*, *M*, *N*, u. s. f. sind kleine körperliche Massen, und ihre Lage gegen zwo grade Linien *AB*, *DI*, die sich in *C* senkrecht schneiden, ist gegeben; man soll die Richtung und Grösse einer Kraft suchen, die allen Schwungkräften zusammen äquipollent ist.

Aufl. Man setze HL, KO, MP, NQ u. s. f. auf AB senkrecht: so sind CL und LH, CO, und OK, CP und PM, u. s. f. gegeben. Aber jede einzelne Schwungkraft kan man in zwo andre nach diesen Richtungen zerlegen, und zwar sind diese Schwungkräfte

nach der Richtung $CH = \frac{\gamma\gamma}{2g} CH.H$

- - - $CK = \frac{\gamma\gamma}{2g} CK.K$

- - - $CM = \frac{\gamma\gamma}{2g} CM.M$

- - - $CN = \frac{\gamma\gamma}{2g} CN.N$

Hieraus

Hieraus erhält man nach der Richtung CB folgende Kräfte

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}(CL.H + CO.K + CP.M + CQ.N)$$

und nach der Richtung CD folgende

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}(LH.H + OK.K + PM.M - QN.N)$$

Wenn nun G der Massen H, K, M, N, gemeinschaftlicher Schwerpunct, und $\int M$ die Summe dieser Massen, GR aber auf AB senkrecht ist: so wird

$$CR.\int M = CLH + CO.K + CP.M + CQ.N$$
$$RG.\int M = LH.H + OK.K + PM.M + QN.N$$

Also ist die Summe aller Schwungkräfte nach der Richtung $CB = \frac{\gamma\gamma}{2g} CR.\int M$, und nach der Richtung $CD = \frac{\gamma\gamma}{2g} RG.\int M$. Aus den beyden letztern entstehet die mittlere nach der Richtung $CG = \frac{\gamma\gamma}{2g} CG.\int M$, und dies ist die gesammte Schwungkraft.

Nun sey ADBI eine körperliche Ebene: so kan man jeden Punct M derselben als eine kleine Masse betrachten. Ist nemlich MP auf AB senkrecht; so nehme man an, die Ebene sey, wie im vor. §. in kleine Rechtecke getheilt, davon $M\alpha\mu\beta$ eines vorstellt, und die Masse eines jeden solchen Rechtecks, sey unbestimmt durch ΔM ausgedrückt. Man setze $CP = x$, $PM = y$, $CM = r$. Wäre nun die ganze Masse ΔM in dem Puncte M beysammen: so

wäre

wäre ihre Schwungkraft $\frac{\gamma\gamma}{2g} r\Delta M$ nach der Richtung MW, und diese zerlegte sich nach den Richtungen CB und CD in die Kräfte $\frac{\gamma\gamma}{2g} x\Delta M$, und $\frac{\gamma\gamma}{2g} y\Delta M$. Die mittlere Richtung aller dieser Kräfte würde wie vorhin durch C gehen. Wenn man nun statt ΔM die Masse eines jeden dieser Rechtecke, statt x aber seine Entfernungen von CD setzt, und hierauf alles summirt: so drückt diese Summe desto richtiger die Summe aller Kräfte nach der Richtung CB aus, je kleiner Δx und Δy genommen werden, und die letzte dieser Summen, also das Integral $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int x d M$ giebt die wahre Summe aller Kräfte nach der Richtung CB. Eben so erhellet, daß $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int y d M$ die Summe aller Kräfte nach der Richtung CD geben müsse. Da nun $\int x d M =$ CR.M, und $\int y d M =$ RG.M (143 §.): so wird jene Summe $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$ CR.M, und diese $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$ RG.M. Aus beyden entstehet die mittlere nach der Richtung CG $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$ CG.M.

Daher kan man die Sache so betrachten, als wenn in jedem Punct M eine unendlich kleine Masse befindlich wäre, die durch die Umdrehung eine unendlich

kleine

kleine Schwungkraft bekommt. Wenn die Summe aller Massen, oder die ganze Masse der Ebene im Schwerpunct beysammen wäre: so würde bey eben der Umdrehungs-Geschwindigkeit daher dieselbe Schwungkraft entstehen, und zwar nach eben der Richtung CG. Sie ist wiederum, wie im 141 §. dem Abstande des Schwerpuncts vom Bewegungspuncte proportional, und verschwindet, wenn sich die Ebene um ihren Schwerpunct selbst drehet. In dem letzten Fall darf die Axe gar nicht gehalten werden, und die Ebene kan sich um diese Axe frey drehen. In andern Fällen aber leidet der Punct C die Gewalt $\frac{\gamma\gamma}{2g}$ CG.M.

145 §.

Die Axe *EF* wird in den Puncten *E* und *F* gehalten, jedoch so, daß sich die Ebene *ADBI* frey um diese Axe mit der Winkelgeschwindigkeit γ dreht: man frägt, wie stark diese Puncte wegen der Schwungkräfte gedruckt werden. 159 Fig.

Aufl. Ein paar Kräfte nach den Richtungen *Ee* und *Ff* mit CG parallel angebracht, sind der Kraft nach CG äquipollent, wenn die Kraft nach $Ee = \frac{CF}{EF} \cdot \frac{\gamma\gamma}{2g}$ CG.M, und die Kraft nach $Ff = \frac{CE}{EF} \cdot \frac{\gamma\gamma}{2g}$ CG.M genommen wird (40 §. St.) So stark werden also die Puncte E und F gedruckt.

Hieraus läst sich beurtheilen, wie stark die respective Festigkeit der Axe (185 §. St.) seyn müsse, damit

damit sie nicht zerbreche, wenn E und F gehalten werden. Um die absolute Festigkeit der Ebene zu beurtheilen, welche erfordert wird, damit ihre Theile wegen der Schwungkräfte nicht auseinander reissen, dienen folgende Betrachtungen. Wenn CW und CB ein paar grade Linien sind, die sich von C aus, bis an den Umfang der Ebene erstrecken, und den Winkel BCW einschliessen: so läst sich durch die Integralrechnung finden, wie groß die Summe aller Schwungkräfte sey, die von dem Theil der Ebene BCW herrührt. Mit dieser Gewalt strebt also das Stück BCW sich von dem übrigen loszureissen. Daher müssen die Theile an CB und CW mit genugsamer Festigkeit zusammenhängen, um dieser Gewalt zu widerstehen. Diese Festigkeit muß desto grösser seyn, je näher die Theilchen dieser Masse bey C liegen, weil wegen des Zusammenhanges der Theile unter einander, die Schwungkräfte der entfernten Puncte sich mit denen vereinigen, die bey C näher liegen.

146 §.

160 Fig. Es kan sich eine Ebene ABγβ auch um eine Axe EF schwingen, die selbst in dieser Ebene liegt, und es lassen sich die bisherigen Schlüsse leicht so verändern, wie es dieser besondre Fall erfordert. Die Ebene schwingt sich in diesem Fall, nach der Fläche, (in planum) da sie sich in dem vorhin betrachteten Fall nach der Seite (in latus) schwingt. Wenn wiederum H, K, M, N körperliche Puncte sind, die in dieser Ebene liegen, und man ziehet HI, KL, MP, ND, auf die Axe EF senkrecht: so gehen diese Puncte H, K, M, N in Kreisen herum, auf deren Ebene EF senkrecht ist, und der Begrif der Winkelgeschwin-

geschwindigkeit läst sich hier ohne Schwürigkeit anwenden. Wenn die Umdrehung gleichförmig ist, und die Ebene BAβ ist in der Zeit t in die Lage BAb, PM aber in die Lage Pm gekommen, so bestimmt MPm, und jeder ähnliche Winkel die Grösse des Flächenwinkels, um welchen sich die Ebene gedrehet hat. Dafern dieser Winkel $= \varphi$ ist; so ist $\frac{\varphi}{t}$ die Umdrehungsgeschwindigkeit, $\frac{\varphi}{t}$ PM aber die wahre Geschwindigkeit eines jeden Puncts M. Alle Puncte haben einerley Umdrehungsgeschwindigkeit, und diese ist mit der Winkelgeschwindigkeit der ganzen Ebene einerley.

Jeder Punct aber, wie P in der Axe, leidet eine Gewalt, die der Schwungkraft des zugehörigen Puncts M gleich ist; oder aller Puncte M, wenn mehrere in eben der Linie PM liegen. Um nun von der Stärke der gesammten Schwungkraft zu urtheilen, betrachte man zuerst eine bestimmte Anzahl Puncte H, K, M, N, als kleine Massen: so sind die Richtungen aller ihrer Schwungkräfte parallel, und auf EF senkrecht. Die Summe aller dieser Kräfte ist $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$ (DN.N + LK.K + IH.H + PM.M), und wenn Ss ihre mittlere Richtung ist: so wird

$$AS = \frac{AD.DN.N + AL.LK.K + AI.IH.H + AP.PM.M}{DN.N + LK.K + IH.H + PM.M}$$

(42 §. St.) Es sey G der gemeinschaftliche Schwerpunct dieser Massen, und GC auf EF senkrecht. Die Summe der Massen H + K + M + N sey $= \int M$: so

ist $CG.\int M = DN.N + LK.K + IH.H + PM.M$; also wird die Summe aller Schwungkräfte = $\frac{\gamma\gamma}{2g} CG.\int M$, und wenn

$$AS = \frac{AD.DN.N + AL.LK.K + \text{etc.}}{CG.\int M}$$

genommen, Ss aber auf EF senkrecht gesetzt wird: so ist Ss ihre mittlere Richtung.

Die Summe aller Schwungkräfte ist demnach wie in den vorigen Fällen eben so groß, als sie seyn würde, wenn alle Massen in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunct beysammen wären, und sie ist dem Abstande des Schwerpuncts von der Axe proportional, wenn die Winkelgeschwindigkeit einerley ist. Nur geht die mittlere Richtung aller Schwungkräfte nicht in jedem Fall durch den Schwerpunct, ob sie gleich auf der Axe senkrecht ist. Es fällt nemlich Ss nur alsdenn mit CG zusammen, wenn AS = AC, folglich CS = o ist. Es wird aber

$$CS = \frac{CL.LK.K + CI.IH.H + CP.PM.M - CD.DN.N}{CG.\int M}$$

(42 §. St.) und wenn dieser Ausdruck = o seyn soll: so muß der Zehler dieses Bruchs = o seyn, d. i. die Momente aller Schwungkräfte in Ansehung des Puncts C müssen einander aufheben. In diesem Fall also muß der Punct C gehalten werden; in andern Fällen aber der Punct S, und dieser Punct wird alsdenn mit einer Gewalt = $\frac{\gamma\gamma}{2g} CG.\int M$ gedrückt. Wird dieser Punct hinlänglich gehalten: so bedarf die Axe keiner weitern Unterstützung, sie wird von selbst völlig ruhig bleiben.

147 §.

Je kleiner CG ist, je näher also der Schwerpunct bey der Axe liegt, desto kleiner wird die Summe der Schwungkräfte, und der Nenner des Bruchs, welcher CS ausdrückt, wird ebenfalls desto kleiner. Dafern nun der Zehler nicht zugleich in eben dem Verhältnisse abnimmt; so wird CS grösser, und S entfernt sich von C. Wenn G in C fällt; also C selbst der Schwerpunct ist: so wird der Nenner des gedachten Bruchs, = o, also wird CS unendlich groß, dafern nicht der Zehler dieses Bruchs ebenfalls = o wird. Behält der Zehler eine bestimmte Grösse: so will dies so viel sagen: Man mag einen Punct der Axe unterstützen, welchen man will: so wird die Axe nicht ruhig bleiben; sondern sich um diesen Punct drehen. Folgende Betrachtung wird dies erläutern. Weil die Summe der Schwungkräfte = o ist: so müssen auf beyden Seiten der Axe EF Massen liegen, und ein Theil der Schwungkräfte wird die Axe nach der einen Seite; die übrigen werden sie nach der entgegengesetzten Seite ziehen. Die Summe derer, die nach der einen Seite ziehen, wird so groß seyn, als die Summe der übrigen entgegengesetzten. Es sey *Ee* die Summe aller Schwungkräfte, auf der einen, *Ff* die Summe aller dieser Kräfte auf der andern Seite, so daß *Ee* und *Ff* zugleich die mittlern Richtungen vorstellen: so wird *Ee* = *Ff* seyn, und man hat am Hebel EF den Fall, welcher am Ende des 39 §. St. betrachtet worden, bey welchem kein Gleichgewicht bestehen kan, wenn nur ein Punct des Hebels gehalten wird. Das Moment, womit die Kräfte den Hebel um C zu drehen streben, ist = (CE + CB) *Ee* = EB . *Ee*, und

dies Moment wird nicht $=0$, wofern nicht die mittleren Richtungen Ee und Ff, in einerley graden Linie zusammen fallen.

Wenn demnach nicht allein die Axe durch den Schwerpunct gehet; sondern auch diese Axe in der Ebene selbst, eine solche Lage hat, daß die Momente der Schwungkräfte, womit sie die Axe um jeden willkührlichen Punct derselben zu drehen streben, einander aufheben; also die mittlern Richtungen der Schwungkräfte zu beyden Seiten der Axe in grader Linie liegen: so darf die Axe gar nicht gehalten werden, und die Ebene wird sich um diese Axe frey drehen.

148 §.

160 Fig. Eine körperliche Ebene drehet sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit γ um die Axe EF, welche in dieser Ebene liegt: man sucht die Richtung und Grösse der gesammten Schwungkraft.

Aufl. Von einem unbestimmten Punct M dieser Ebene sey MP auf die Umdrehungsaxe senkrecht gesetzt, und $AP=x$, $PM=y$; die Masse der Ebene sey M, so daß man M durch eine Function von x oder y ausdrücken kan. Wäre nun die Ebene, wie im 114 §. in Rechtecke getheilt, wovon eines jeden Seitenlinie unbestimmt, durch Δx und Δy, eines jeden Masse aber durch ΔM, ausgedrückt werden kan, und wäre $M\mu n\nu$ ein solches Rechteck: so würde

eines jeden Schwungkraft $= \frac{\gamma\gamma}{2g} y\Delta M$ seyn, wenn die ganze Masse ΔM in M beysammen wäre, und einer jeden dieser Schwungkräfte Moment, womit sie

sie die Axe um A zu drehen strebte, wäre = $\frac{\gamma\gamma}{2g} xy\Delta M$. Man überzeugt sich aber leicht durch Schlüsse, die den im 144 §. gebrauchten ähnlich sind, daß die letzte Summe $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int yd\mathrm{M}$, die gesammte Schwungkraft ausdrücke. Ist nun Ss die mittlere Richtung aller Schwungkräfte: so nähert sich die Summe aller Momente $\frac{\gamma\gamma}{2g} xy\Delta M$ dem Moment AS . $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int yd\mathrm{M}$ ebenfalls desto mehr, je kleiner Δx und Δy genommen werden, und es wird die letzte Summe $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int xyd\mathrm{M} = \mathrm{AS} . \int yd\mathrm{M}$. Nimmt man also $\mathrm{AS} = \frac{\int xyd\mathrm{M}}{\int yd\mathrm{M}}$, und zieht Ss auf die Axe senkrecht: so ist Ss die mittlere Richtung aller Schwungkräfte. Es sey G der Ebene Schwerpunct, und GC auf EF senkrecht: so ist $\int yd\mathrm{M} = \mathrm{CG} . \mathrm{M}$ (143 §.), also die Schwungkraft $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \mathrm{CG} . \mathrm{M}$, und $\mathrm{AS} = \frac{\int xyd\mathrm{M}}{\mathrm{CG} . \mathrm{M}}$.

Demnach ist die gesammte Schwungkraft zwar so groß, als wenn die ganze Masse der Ebene in ihrem Schwerpunct vereinigt wäre; aber die mittlere Richtung aller Schwungkräfte geht nicht durch den Schwerpunct, ohne nur in dem Fall, wenn AC = AS, also CS = o ist. Es sey AC = f, und CP = u;

also $f+u=x$: so wird $AS=\frac{\int(f+u)y\,dM}{CG.M}=$

$\frac{f\int y\,dM+\int uy\,dM}{CG.M}=f+\frac{\int uy\,dM}{CG.M}$, folglich $CS=$

$AS-f=\frac{\int uy\,dM}{CG.M}$.

Demnach muß $\int uy\,dM=0$ seyn, wenn Ss mit CG zusammen fallen, und die Richtung der gesammten Schwungkraft durch den Schwerpunct gehen soll.

Weil nun $\frac{\gamma\gamma}{2g}\int uy\,dM$ das gesammte Moment aller Schwungkräfte in Ansehung des Puncts C ist: so erhellet wie im vor. §, daß die Momente aller einzelnen Schwungkräfte in Ansehung des Puncts C einander aufheben müssen, wenn die mittlere Richtung durch den Schwerpunct gehen soll; da es dann in diesem Fall zulänglich ist, wenn der Punct C allein gehalten wird. Er leidet alsdenn eine Gewalt

$=\frac{\gamma\gamma}{2g}CG.M$, und diese verschwindet, wenn CG

$=0$ ist; also die Axe durch den Schwerpunct gehet. Dies ist der einzige Fall, in welchem sich die Ebene um die Axe frey drehen kan, ohne daß es nöthig wäre, sie zu halten. Es muß nun die mittlere Richtung der Schwungkräfte zu beyden Seiten durch den Schwerpunct gehen, damit beyde in einerley graden Linie zusammen fallen. Eine Axe, die diese Eigenschaft hat, heist eine freye Axe der Ebene.

In allen andern Fällen aber werden die Schwungkräfte die Axe um den Punct C zu drehen streben, wenn derselbe allein gehalten wird, und die Axe wird

nicht

nicht in Ruhe bleiben, dafern sie nicht in zweenen Puncten gehalten wird. Wenn A und B diese Puncte sind: so findet man auf folgende Art, wie stark die Gewalt sey, womit beyde Puncte gedrückt werden. Es sey die gesammte Schwungkraft $= V$, die man sich bey S, nach der Richtung Ss angebracht vorstellen kan. Wenn nun an A und B ein paar andre Kräfte, nach den Richtungen A*a*, und B*b*, mit Ss parallel angebracht sind, welche die Axe eben so stark in diesen Puncten, als V, drücken: so ist nach dem 40 §. St. die Kraft $A = \frac{BS.V}{AB}$, die Kraft $Bb = \frac{AS.V}{AB}$. Weil aber $BS = AB - AS$ ist; so wird die Kraft $Aa = V - \frac{AS.V}{AB}$. Ferner ist $AS = AC + CS$, und es war $AC = f$, $CS = \frac{\int uy d M}{\int y d M}$. Wenn man also der Kürze wegen $\int y d M = B$, $\int uy d M = E$ setzt: so wird $V = \frac{\gamma\gamma}{2g} B$, $CS = \frac{E}{B}$, und dies giebt

$$Aa = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(B - \frac{B.f}{AB} - \frac{E}{AB}\right)$$

$$\text{und } Bb = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\frac{E}{AB} + \frac{B.f}{AB}\right).$$

Wenn die Axe EF durch den Schwerpunct gehet, so ist $\int y d M = CG.M = B = 0$; also $Aa = -\frac{\gamma\gamma}{2g}.\frac{E}{AB}$, und $Bb = +\frac{\gamma\gamma}{2g}.\frac{E}{AB}$. Folglich

lich sind in diesem Falle beyde Kräfte einander gleich, und entgegengesetzt. Beyde Kräfte werden alsdenn nur $= 0$, wenn $E = \int y d M = 0$ ist.

Durch Hülfe dieser Betrachtungen nun läst sich sowohl die Festigkeit der Ebene selbst, als auch die respective Festigkeit der Axe beurtheilen, welche erfordert wird, um die Gewalt der Schwungkräfte zu ertragen.

149 §.

Den geometrischen Inhalt eines Körpers durch Hülfe der Integralrechnung zu finden.

Aufl. Man kan die Natur der Oberfläche eines Körpers auf eine ähnliche Art durch eine Gleichung ausdrücken, wie sich die Natur einer Linie auf einer Ebene durch eine Gleichung ausdrücken läst. Nur braucht man bey der Oberfläche eines Körpers drey Coordinaten, da bey einer Linie, auf einer Ebene, zwo genügen. Man schneide den Körper mit einer
161 Ebene CAB, und ziehe in dieser Ebene zwo grade Li-
Fig. nien AB, AC, die einander senkrecht schneiden. Durch A setze man eine dritte Linie AD auf die Ebene BAC senkrecht: so sind auch die drey Ebenen BAC, BAD, DAC, auf einander senkrecht. Nun sey M ein Punct in der Oberfläche des Körpers, und von demselben MQ, auf die Ebene BAC, QP aber, auf AB senkrecht gezogen: so ist die Lage des Puncts M gegen die drey Ebenen BAC, BAD, CAD, bestimmt, wenn AP, PQ, QM bestimmt sind (16 §). Man setze $AP = x$, $PQ = y$; $QM = z$, und nehme an, daß für jede Werthe von x und y, bekannt sey, wie groß $QM = z$ genommen werden müsse, damit M in des Körpers Oberfläche liege: so ist die Lage aller Puncte der Oberfläche gegen die drey Ebenen BAC, BAD, DAC;

DAC; folglich die Beschaffenheit der Oberfläche selbst bekannt. Hätte man eine Gleichung zwischen x, y und z, von der Beschaffenheit, daß sich daraus der jedesmahlige Werth von z herleiten liesse, wenn statt x und y bestimmte willkührliche Werthe gesetzt werden: so könnte man aus der Gleichung die Gestalt der Oberfläche, und andre Eigenschaften derselben herleiten. Es ist wiederum nicht nothwendig, daß die drey Ebenen BAC, BAD, CAD, auf einander senkrecht stehen; nur wird dies der kürzern Rechnung wegen in der Folge angenommen werden. Stünden sie schief auf einander: so müste man MQ mit AD, und QP mit AC parallel ziehen.

Nun lege man durch den Winkel PQM eine Ebene, und HIMm sey die Durchschnittslinie mit der Oberfläche des Körpers. Es sey AP $= a$, ein bestimmter Werth von x, und man setze in der Gleichung für die Oberfläche des Körpers $x = a$: so erhält man eine Gleichung zwischen $y =$ PQ, und $z =$ QM, welche die Natur der Durchschnittsfigur HIMm ausdrückt. Man kan nun PQ als die Abscisse, und QM als die Ordinate dieser Linie betrachten; und wenn man PQ, wie die Abscisse im 114§. in eine beliebige Anzahl gleicher Theile bey K, Q, u. s. f. eintheilt, und durch die Theilungspuncte die zugehörigen Ordinaten PH, KI, QM, u. s. f. durch H, I, M, u. s. f. aber mit PQ Parallelen ziehet: so werden in und um die Figur PHmq eben solche Rechtecke, wie im 114§. beschrieben; und jedes läst sich unbestimmt durch $\Delta y\ \Delta z$ ausdrücken: ihre letzte Summe aber, oder das Integral $\int z dy$ giebt den Flächen-Inhalt der Figur PHMQ, oder PHmq, welche beyde gleich groß werden, wenn Δy, und Δz verschwinden.

Es

Es wachse die Abscisse AP um das unbestimmte Stück $Pp = \Delta x$, und man lege durch p eine Ebene $ONWp$ mit DAC parallel. Wenn man nun ferner durch alle Ordinaten PH, KI, QM Ebenen legt, die mit BAD parallel sind, und durch alle Puncte H, I, M, u. s. f. Ebenen, die mit BAC parallel laufen: so werden dadurch in demjenigen Stück des Körpers, das zwischen den Ebenen $PHMmq$, und $ONWp$ liegt, die Parallelepipeda PL, RS, zT, u. s. f. beschrieben, wie in der ebenen Figur im 114 §. die Parallelogramme, und jedes derselben läst sich unbestimmt, durch $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$, ausdrücken, da dann die drey Seitenlinien durch willkührlich angenommene Werthe von x und y bestimmt werden. Eine kleine Ueberlegung ergiebt, ohne daß es nöthig wäre, dies weitläuftiger zu zeigen, daß die Summe aller dieser Parallelepipeden, dem geometrischen Inhalt von demjenigen Stück des Körpers, das zwischen den Ebenen Hmq, und ONW liegt, desto näher komme, je kleiner Δx, Δy, Δz genommen sind. Ist nun AP in eben so grosse Theile, als Pp ist, eingetheilt worden: so erhellet, man könne in dem ganzen Stücke des Körpers zwischen den Ebenen DAC, und $PHmq$ eben solche Parallelepipeda beschreiben. Je kleiner diese Theile von AP, und die zugehörigen Δy, Δz genommen werden, desto näher kommt die Summe derselben dem zwischen den genannten Ebenen enthaltenen Stück des Körpers, und ihre letzte Summe, worauf man kommt, wenn Δy, Δx, Δz verschwinden, wird dem Inhalt desselben gleich. Diese letzte Summe kan man so ausdrücken $\int dx dy dz$, und $dx dy dz$ als ein unendlich kleines Parallelepipedum betrachten, wovon alle drey Seiten unendlich

klein

klein sind. Dann aber ist eine dreymahlige Integration nöthig. Das Integral $\int dz$ giebt z, wodurch man eine Ordinate, wie MQ verstehen kan. Hierauf multiplicirt man mit dy, und integrirt $z dy$: so giebt das Integral $\int z dy$, den Inhalt einer ebenen Figur, wie PHMQ. Man multiplicirt dies Integral aufs neue mit dx, und integrirt zum dritten mahl: so giebt das Integral $\int dx \int z dy$ einen allgemeinen Ausdruck für den geometrischen Inhalt des Körpers.

Hat man um die Figur PHmq; die Parallelogramme PI, KM, Qm, u. s. f. beschrieben, und man rechnet diejenigen Parallelepipeda, deren Ecken über der Oberfläche des Körpers hervorragen würden, dergleichen MV eines wäre, mit zur Summe: so ist die Summe aller dieser Parallelepipeden grösser, als das zugehörige Stück des Körpers; aber die letzte dieser Summen wird demselben ebenfalls gleich: oder der Körper ist die Grenze aller dieser Summen, der sie sich ohne Aufhören nähern, wenn Δx, Δy, Δz ohne Aufhören abnehmen.

Diese allgemeine Betrachtung darüber, wie sich der geometrische Inhalt eines Körpers vermittelst der Integral-Rechnung finden lasse, kan hier genügen. Bey weiterer Ausführung der Integralrechnung wird diese Sache vollständiger auseinander gesetzt werden.

150 §.

Wenn die Gleichung zwischen dreyen rechtwinklichten Coordinaten, für die Oberfläche eines Körpers gegeben ist: den Schwerpunct dieses Körpers zu finden.

161 Fig. Aufl. Es sey M ein unbestimmter Punct innerhalb dem Umfang eines Körpers. Wenn nun AB, AC, AD, die drey rechtwinklichten Axen des Körpers sind, womit die drey Coordinaten parallel genommen werden: so sey MQ auf der Ebene BAC, und QP auf AB senkrecht. Bey M stelle man sich ein Parallelepipedum MTV*r*, wie im vor. §. vor, dessen Seiten Δx, Δy, Δz sind, und die Masse desselben sey $= \Delta M$. Wäre diese ganze Masse im Punct M beysammen: so wäre das Moment dieser Masse gegen die Ebene DAC $= x\Delta M$. Eben dieser Ausdruck bezeichnet das Moment eines jeden der übrigen Parallelepipeden, die man, wie im vor. §. verzeichnet, wenn statt ΔM, eines jeden Masse, und statt x die zugehörige Abscisse gesetzt wird. Ist nun G der gesuchte Schwerpunct, und GF auf CAB, FE aber auf AB senkrecht: so kommt die Summe aller Producte $x\Delta M$ dem Moment AE.M desto näher, je kleiner Δx, Δy, Δz genommen werden, und es ist eigentlich AE.M die Grenze aller dieser Summen, worauf man kommt, wenn Δx, Δy, Δz, also auch ΔM verschwinden; folglich erhält man AE.M $= \int x d\mathrm{M}$, und $\mathrm{AE} = \frac{\int x d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$. Man findet durch völlig ähnliche Schlüsse $\mathrm{EF} = \frac{\int y d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$, und $\mathrm{FG} = \frac{\int z d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$.

Es kan demnach jeder Punct des Körpers als ein unendlich kleines Gewicht betrachtet werden, das der Masse des unendlich kleinen Parallelepipedi $dxdydz$ proportional ist; und dann läst sich diese Auflö-

Auflösung als ein besonderer Fall der allgemeinen Auflösung des 65 §. St. ansehen. Man findet auf solche Art den Punct G, durch welchen die mittlere Richtung aller Pressungen auf alle noch so kleine Theilchen des Körpers, durchgehen muß, und die Sache ist wiederum, wie in den oben bereits vorgekommenen ähnlichen Fällen, nicht auf die Fälle eingeschränkt, wenn diese Pressungen von der natürlichen Schwere herrühren. Allemahl, wenn der ganze Druck P auf die ganze Masse M durch eine Function ihrer körperlichen Grösse ausgedrückt werden kan, läst sich die Sache so betrachten. Und wenn die mittlere Richtung aller Pressungen auf alle einzelne Theilchen der Masse M, durch G gehet: so hat man $AE = \frac{\int x dP}{P}$; $EF = \frac{\int y dP}{P}$; $FG = \frac{\int z dP}{P}$. Man vergleiche hiemit die, dem 65 §. St. beygefügte Folge.

151 §.

Ein fester Körper von willkührlicher Gestalt und Grösse, kan sich auf eine ähnliche Art um eine feste Axe drehen, wie die Sache bey ebenen Flächen ist betrachtet worden. Es sey AB eine Durchschnitts-Figur des Körpers, die auf der Umdrehungsaxe EF senkrecht stehet: so werden alle Puncte des Körpers, die in dieser Ebene befindlich sind, in Kreisen herumgehen, die in dieser Ebene liegen, und der Durchschnittspunct C mit der Axe, wird ihr Mittelpunct seyn. Jeder andre Punct des Körpers, wenn er auch nicht in dieser Ebene liegt, wird gleichfalls in einem auf der Axe EF senkrechten Kreise herumgehen, 162 Fig.

hen, dessen Halbmesser der Abstand des Puncts von der Axe ist. Wenn die Umdrehung gleichförmig ist: so verhalten sich die Geschwindigkeiten aller Puncte des Körpers, wie ihre Entfernungen von der Axe, und die Winkel-Geschwindigkeit ist für alle Puncte einerley. Die Winkelgeschwindigkeit eines jeden dieser Puncte ist also zugleich die Winkelgeschwindigkeit des ganzen Körpers. Es wird angenommen, daß die Axe EF zulänglich gehalten werde; jedoch so, daß sich der Körper frey drehen kan.

Wenn dem Körper nun einmahl eine gewisse Winkelgeschwindigkeit mitgetheilt ist: so wird die Umdrehung beständig gleichförmig fortgehen; es sey denn, daß bewegende Kräfte hierin eine Aenderung machen. Jeder Punct würde für sich allein in seinem Kreise gleichförmig herumgehen, wenn ihn nur ein Faden, oder sonst etwas ähnliches hinderte, sich vom Mittelpunct zu entfernen. Es kan aber aus dem Zusammenhang aller Puncte unter einander nichts erfolgen, was die Gleichförmigkeit der Bewegung stöhrte, weil alle einzelne Puncte eben dieselbe Lage während der Umdrehung behalten würden, wenn nur an jedem eine der Schwungkraft gleiche, und ihr entgegengesetzte Kraft angebracht wäre; die Puncte selbst aber übrigens gar nicht zusammenhiengen.

152 §.

29 Fig. Ein fester Körper drehet sich gleichförmig um die Axe *AB*, mit der Winkelgeschwindigkeit γ. Die Lage zwoer Ebenen *BAC*, *BAD*, die sich in der Axe *AB* senkrecht schneiden, nebst einer dritten *DAC*, welche die vorige ebenfalls senk-

senkrecht schneidet, ist in dem Körper bekannt; man soll die Gewalt finden, welche die Axe *AB* wegen der Schwungkräfte leidet.

Aufl. Man nehme zuerst an, daß nur eine bestimmte Anzahl Puncte des Körpers P, Q, R, u. s. f. körperliche Massen seyn, und setze PK, QM, RO, u. s. f. auf BAC, sodann auch KH, ML, ON, u. s. f. auf AB senkrecht: so bekommen P, Q, R die Schwungkräfte

$\frac{\gamma\gamma}{2g}$ HP.P nach der Richtung HP

$\frac{\gamma\gamma}{2g}$ LQ.Q nach der Richtung LQ

$\frac{\gamma\gamma}{2g}$ NR.R nach der Richtung NR u. s. f.

Man zerlege alle diese Kräfte nach den Richtungen AC, AD, und bringe sowohl diejenigen, die mit AC, als auch die, so mit AD parallel ziehen, in eine Summe: so hat man folgende Kräfte:

Nach der Richtung AC

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}(HK.P+LM.Q+NO.R+\text{---}) = Ss.$$

Nach der Richtung AD

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}(KP.P+MQ.Q+QR.R+\text{---}) = Vv.$$

Die mittlere Richtung jener Summe sey S*s*, und dieser Summe V*v*: so ergeben sich die Puncte der Axe S und V, durch welche die Richtungen durchgehen, aus folgenden Gleichungen. Es ist

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}(AH.HK.P+AL.LM.Q+AN.NO.R+\text{---})$$

$$= \frac{\gamma\gamma}{2g}(HK.P + LM.Q + NO.R + \text{----}) AS.$$

Also ist

$$AS = \frac{AH.HK.P + AL.LM.Q + AN.NO.R \text{---}}{HK.P + LM.Q + NO.R \text{---}}$$

und eben so folgt, es sey

$$AV = \frac{AH.KP + AL.MQ.Q + AN.OR.R \text{---}}{KP.P + MQ.R + OR.R \text{---}}$$

Es sey G der Massen P, Q, R, u.s.f. gemeinschaftlicher Schwerpunct: so ist

$AE(P + Q + R) = AH.P + AL.Q + AN.R$

$EF(P + Q + R) = HK.P + LM.Q + NO.R$

$FG(P + Q + R) = KP.P + MQ.Q + QR.R$

Setzt man demnach der Kürze wegen die Summe aller Massen $= \int M$: so erhält man

$$Ss = \frac{\gamma\gamma}{2g} EF.\int M, \text{ und } AS = \frac{AH.HK.P + AL.LM.Q \text{---}}{EF.\int M.}$$

$$Vv = \frac{\gamma\gamma}{2g} FG.\int M, \text{ und } AV = \frac{AH.KP.P + AL.MQ.Q \text{---}}{FG.\int M}$$

Dafern alle Massen im Schwerpunct beysammen wären, und dieser Punct mit eben der Winkelgeschwindigkeit herumgienge: so entstünde daraus eine

Schwungkraft $= \frac{\gamma\gamma}{2g} EG.\int M$ nach der Richtung EG, und diese zerlegte sich nach den Richtungen AC und AD in die Kräfte $\frac{\gamma\gamma}{2g} EF.\int M$ und $\frac{\gamma\gamma}{2g} FG.\int M$, welche den Kräften Ss und Vv zwar gleich sind; allein sie sind nicht in eben den Puncten der Axe angebracht.

Ueberhaupt aber lassen sich die Kräfte Ss und Vv nur alsdenn auf eine bringen, die beyden zusammen

äqui-

äquipollent ist, wenn AV = AS ist. In diesem Fall wird die mittlere Richtung der Schwungkräfte mit EG parallel. Sie fällt aber alsdenn mit EG zusammen, und geht durch den Schwerpunct, wenn auch AE = AV = AS, also EV = ES = o ist. In diesem einzigen Fall also haben die Schwungkräfte keine andre Würkung auf die Axe, als sie in dem Fall haben würden, wenn alle Massen im Schwerpunct vereinigt wären. Der Punct E würde nun mit der Gewalt $\frac{\gamma\gamma}{2g}$ EG. $\int$M nach der Richtung EG gedrückt. Wenn demnach bey eben diesen Voraussetzungen die Axe AB durch den Schwerpunct gienge: so hätte man EG = o, und die Axe litte gar keine Gewalt.

Wenn nun ein Körper von willkührlicher Gestalt, und Grösse gegeben ist, und seine Masse ist durch seinen ganzen geometrischen Raum verbreitet: so sey Q ein unbestimmter Punct desselben, und AL = x, LM = y, MQ = z, LQ = r. In oder um den Körper beschreibe man, wie im 149 §, die Parallelepipeda, wovon die Seitenlinien eines jeden unbestimmt durch Δx, Δy, Δz, ausgedrückt werden können, und es sey Q eine Spitze der Ecke eines solchen Parallelepipedi $\Delta x \Delta y \Delta z$; seine Masse sey = ΔM. Wäre nun diese Masse ganz in Q beysammen: so entstünde daher die Schwungkraft $\frac{\gamma\gamma}{2g} r\Delta$M nach der Richtung LQ, und diese zerlegte sich in die Kräfte

$\frac{\gamma\gamma}{2g} y\Delta$M nach der Richtung LM, oder AC

$-\frac{\gamma\gamma}{2g} z\Delta$M nach der Richtung LY, oder AD.

Die Momente, womit diese Kräfte die Axe um A zu drehen strebten, wären $\frac{\gamma\gamma}{2g} xy\Delta M$, und $\frac{\gamma\gamma}{2g} xz\Delta M$.

Stellt man sich nun statt ΔM ein andres Parallelepipedum, von den in oder um den Körper beschriebenen vor: statt y, z, und x aber seine Entfernungen von den Ebenen DAB, BAC, und DAC: so drückt die Summe aller $\frac{\gamma\gamma}{2g} y\Delta M$, desto richtiger die wahre Summe aller Kräfte nach der Richtung AC aus, je kleiner Δx, Δy, Δz genommen werden. Ist Ss die mittlere Richtung aller Kräfte nach der Richtung AC, und die Kraft Ss allen zusammen äquipollent: so wird das Integral $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int y d\mathrm{M} = Ss$, und die letzte Summe aller Momente $\frac{\gamma\gamma}{2g} xy\Delta M$, oder das Integral $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int xy d\mathrm{M}$, wird dem Moment $AS.Ss$ gleich. Daher erhält man $AS = \frac{\int xy d\mathrm{M}}{\int y d\mathrm{M}}$. Wenn nun G des Körpers Schwerpunct ist; so wird $EF.M = \int y d\mathrm{M}$: also ist die Kraft $Ss = \frac{\gamma\gamma}{2g} EF.M$, und $AS = \frac{\int xy d\mathrm{M}}{EF.M}$. Wenn ferner Vv die mittlere Richtung aller mit AD parallelen Kräfte, und eine Kraft, die allen äquipollent ist, $= Vv$ gesetzt wird: so folgt auf eben die Art, es sey $Vv = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int z d\mathrm{M} = \frac{\gamma\gamma}{2g} FG.M$, und $AV = \frac{\int xz d\mathrm{M}}{\int z d\mathrm{M}} = \frac{\int xz d\mathrm{M}}{FG.M}$. Dem-

Demnach läst sich auch hier die Sache so betrachten, als wenn in jedem Punct des Körpers eine unendlich kleine Masse befindlich wäre, die durch die Umdrehung eine unendlich kleine Schwungkraft bekommt, und die vorhin, bey einer bestimmten Anzahl körperlicher Puncte, festgesetzten Sätze lassen sich hier leicht anwenden. Wäre die ganze Masse im Schwerpunct beysammen: so entstünde daher die Schwungkraft $\frac{\gamma\gamma}{2g}$ EG.M, und diese zerlegte sich nach den Richtungen AC und AD in die Kräfte $\frac{\gamma\gamma}{2g}$ EF.M, und $\frac{\gamma\gamma}{2g}$ FG.M, die den Kräften Ss und Vv gleich sind. Aber die beyden letzten lassen sich nicht auf eine bringen, die beyden äquipollent wäre, dafern nicht AV = AS ist. In diesem Fall ist die mittlere Richtung aller Schwungkräfte mit EG parallel. Und wenn überdem AE = AV = AS, also ES = EV = o ist: so ist EG diese mittlere Richtung.

Es sey AE = f, EL = u, also AL = $x = f + u$:

so wird $AS = \frac{\int(f+u)\,y\,dM}{\int y\,dM}$, und $AV = \frac{\int(f+u)\,z\,dM}{\int z\,dM}$; oder auch $AS = f + \frac{\int uy\,dM}{EF.M}$,

und $AV = f + \frac{\int uz\,dM}{FG.M}$, folglich $ES = AS - f = \frac{\int uy\,dM}{EF.M}$, und $EV = f - AV = -\frac{\int uz\,dM}{FG.M}$.

Es ist aber $\frac{\gamma\gamma}{2g}\int uy\,dM$ die Summe aller Momen-

te der mit AC parallelen Kräfte, und $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int uzd\mathrm{M}$ die Summe aller Momente der mit AD parallelen Kräfte, womit sie die Axe um den Punct E zu drehen streben. Wenn also alle diese Momente einander aufheben: so wird die Axe ruhig bleiben, wenn der Punct E allein gehalten wird, und E wird mit der Gewalt $\frac{\gamma\gamma}{2g}$ EG.M gedruckt werden. Und wenn bey eben den Voraussetzungen E selbst der Schwerpunct; also EG = o ist: so leidet die Axe gar keine Gewalt, und der Körper wird sich frey um die Axe drehen, ohne daß die Axe darf gehalten werden.

Wenn aber gleich E der Schwerpunct; aber nicht $\int uyd\mathrm{M} = \int uzd\mathrm{M} = \mathrm{o}$ wäre; und man wollte den Schwerpunct allein halten: so würde doch nicht die ganze Axe in Ruhe bleiben; sondern die Schwungkräfte würden sie um den Punct E drehen. Soll die Axe in Ruhe bleiben: so muß sie in zweenen Puncten gehörig unterstützt seyn.

153 §.

Die Axe *AB* wird in den Puncten *A* und *B* gehörig gehalten, so, daß sich übrigens der Körper ungehindert drehen kann; man frägt wie stark diese beyden Puncte wegen der Schwungkräfte gedruckt werden.

Aufl. Wenn an A und B nach Richtungen, die mit Ss parallel sind, die Kräfte $\frac{\mathrm{BS.Ss}}{\mathrm{AB}} = \mathrm{A}\alpha$, und $\frac{\mathrm{AS.Ss}}{\mathrm{AB}} = \mathrm{B}\beta$ angebracht sind: so drücken sie die

die Puncte A und B nach diesen Richtungen so stark, als Ss sie drückt (40 §. St.) Eben so kann man an A und B statt der Kraft Vv die Kräfte $A\alpha = \frac{BV.Vv}{AB}$, und $B\beta = \frac{AV.Vv}{AB}$, mit Vv parallel anbringen; da sich dann Aa und $A\alpha$, imgleichen Bb und $B\beta$, auf eine bringen lassen. Man setze der Kürze wegen $fydM = B$, $fzdM = D$, $fuydM = E$, $fuzdM = F$: so wird die Kraft $Ss = \frac{\gamma\gamma}{2g} B$, und $Vv = \frac{\gamma\gamma}{2g} D$; ferner $ES = \frac{E}{B}$, $EV = -\frac{F}{D}$.

Nun erhält man $Aa = \frac{(AB - AS)Ss}{AB} = Ss - \frac{AS.Ss}{AB} = Ss - \frac{(AE+ES)Ss}{AB} = Ss - \frac{f.Ss}{AB} - \frac{ES.Ss}{AB}$; $Bb = \frac{(AE+ES)Ss}{AB} = \frac{f.Ss}{AB} + \frac{ES.Ss}{AB}$. Ferner $A\alpha = \frac{(AB-AV).Vv}{AB} = Ss - \frac{AV.Vv}{AB} = Ss - \frac{(AE-EV)Vv}{AB}$; oder $A\alpha = Vv - \frac{f.Vv}{AB} + \frac{EV.Vv}{AB}$, und $B\beta = \frac{(AE-EV)Vv}{AB} = \frac{f.Vv}{AB} - \frac{EV.Vv}{AB}$. Man setze statt Ss, Vv, ES, EV, die vorhin angenommenen Werthe: so wird

$$Aa = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(B - \frac{f.B}{AB} - \frac{E}{AB}\right)$$

$$Bb = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\frac{f.B}{AB} + \frac{E}{AB}\right)$$

$$A\alpha = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(D - \frac{f.D}{AB} - \frac{F}{AB}\right)$$

$$B\beta = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\frac{f.D}{AB} + \frac{F}{AB}\right)$$

Wenn die Ebene BAC durch den Schwerpunct gehet: so wird $FG = o$; also $D = o$, und es werden $A\alpha$, und $B\beta$ einander gleich, und entgegengesetzt. Geht auch die Ebene BAD durch den Schwerpunct, daß also der Schwerpunct in die Axe fällt: so ist auch $EF = o$; also $B = o$, und es werden Aa und Bb gleichfalls einander gleich und entgegengesetzt. Damit nun die Axe gar keine Gewalt leide, muß zugleich $E = o$, und $F = o$ seyn, wie demjenigen gemäß ist, was im vor. §. bewiesen worden.

Der X. Abschnitt.

Von den Kräften, welche die Schwungbewegung um eine unbewegliche Axe ändern.

154 §.

158 Fig. Es sey M ein körperlicher Punct in der graden Linie CM, die sich um C kreisförmig drehet; auf M würke eine Kraft P nach der Richtung MT, die alle-

allemahl in der Ebene der Bewegung auf CM senkrecht bleibt: so wird die Bewegung des Puncts M in jedem Augenblick eben so beschleunigt, als wenn sich M auf der Tangente MT bewegte (122 §). Wenn nun die Linie CM vermöge der Beschleunigung dieser Kraft in der Zeit t aus der Lage CB, in die Lage CM gekommen ist: so wird der Winkel $BCM = \varphi$, eine Function der Zeit t seyn, und wenn c die Geschwindigkeit des Puncts M am Ende der Zeit t ist: so hat man $c = \frac{d.BM}{dt}$ (106 §). Da nun $BM = CM.\varphi$; folglich $d.BM = CM.d\varphi$ ist: so erhält man $c = \frac{CM.d\varphi}{dt}$, und $\frac{c}{CM} = \frac{d\varphi}{dt}$. Dies ist also die Winkelgeschwindigkeit der Linie CM für das letzte Moment der Zeit t. Es ist der Winkel, um welchen sich CM in der folgenden Secunde drehen würde, wenn im letzten Moment der Zeit t die Kraft P aufhörte, den Punct M zu beschleunigen.

Man setze nun $\frac{d\varphi}{dt} = \gamma$: so ist $c = \gamma.CM$, und man hat vermöge des 106 § $\frac{dc}{2dt} = \frac{gP}{M}$. Nun ist $dc = CM.d\gamma$; also $\frac{CM.d\gamma}{2dt} = \frac{gP}{M}$, und $\frac{d\gamma}{2dt} = \frac{g.P}{CM.M}$. Dieser Ausdruck giebt den Winkel, um welchen sich CM in der folgenden Secunde weiter, als allein wegen der Trägheit drehen würde, wenn sich P während dieser Secunde nicht

änderte, sondern die Masse eben so stark, als am Anfang derselben gleichförmig beschleunigte. Es kann dieser Winkel füglich die **Umdrehungs-Beschleunigung** der Kraft P heissen, so wie $\frac{g.P}{M}$, oder $\frac{dc}{2dt}$ ihre wahre Beschleunigung in Ansehung der Masse M ist.

155 §.

Um diesen Ausdruck richtig zu verstehen, muß man folgendes merken. Eigentlich ist $\frac{d\gamma}{2dt}$ ein, mit dem Halbmesser = 1 zwischen den Schenkeln desjenigen Winkels beschriebener Kreisbogen, um welchen die Linie CM in der folgenden Secunde weiter, als wegen der Trägheit rücken würde, wenn die Kraft P während dieser Zeit unveränderlich bliebe. Wäre nemlich CM = 1; so wäre $\frac{d\gamma}{2dt} = \frac{gP}{M}$, die Beschleunigung der Kraft P auf die Masse M, und $\frac{d\gamma}{2dt}$ ein mit dem Halbmesser = 1 beschriebener Bogen. In diesem Fall verhielte sich der Bogen $\frac{d\gamma}{2dt}$ zur Beschleunigung der Schwere g, wie die Kraft P zum natürlichen Gewicht der Masse M (53 §). Wenn aber CM grösser oder kleiner, als 1 ist; so sucht man hier nicht eigentlich denjenigen Bogen, um welchen die Masse M von der Kraft P würklich beschleunigt wird: sondern vielmehr einen

ihm ähnlichen, mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Bogen, und dieser wird gefunden, wenn man jenen mit seinem Halbmesser dividirt.

156 §.

Wenn M und N ein paar körperliche Puncte in der graden Linie CM sind; und beyde werden nach Richtungen MT, Nt, die auf CN senkrecht sind, von solchen Kräften beschleunigt, die sich wie die Producte der Massen M und N in ihre Entfernungen vom Bewegungspunct verhalten: so ist die Umdrehungsbeschleunigung für beyde Massen einerley. Wenn nemlich P und Q diese Kräfte sind, und es ist P:Q=CM.M:CN.N; so wird $Q = \frac{P.CN.N}{CM.M}$. Nun ist der Kraft P Umdrehungs-Beschleunigung = $\frac{gP}{CM.M}$, und für die Kraft Q wird sie = $\frac{gQ}{CN.N}$ = $\frac{gP}{CM.M}$, welche der vorigen gleich ist.

Diese Kräfte werden demnach überhaupt die Massen M und N in gleichen Zeiten durch ähnliche Bogen treiben, so daß beyde Massen beständig in der graden Linie CM bleiben würden, wenn sie auch nicht vermittelst der festen Linie verbunden wären. Wenn man sich nemlich CM und CN als zweene auf einander liegende Fäden vorstellt, deren äusserste Puncte M und N körperlich sind; so bleiben diese Fäden während der Umdrehung beständig beysammen. Demnach kann auch die Festigkeit der Linie CM in der Bewegung dieser Puncte M und N nichts ändern; sie hält nur die Schwungkräfte auf, die aus der Bewegung entstehen.

Es

Es ist auch umgekehrt wahr, wenn die Umdrehungs-Beschleunigung für beyde Massen M und N einerley seyn soll, welche von den Kräften P und Q, nach den Richtungen MT und N*t* getrieben werden; so müssen sich die Kräfte, wie die Producte aus den Massen in ihre Entfernungen vom Bewegungspunct verhalten. Es muß nemlich $\frac{gP}{CM.M} = \frac{gQ}{CN.N}$ seyn; also P:Q = CM.M:CN.N.

157 §.

Es sey allein M ein körperlicher Punct der Linie CM: an der kleinen Masse M sey nach der Richtung MT eine Kraft P angebracht; an einen andern Punct V aber, der hier als ein blos geometrischer betrachtet wird, eine andre Kraft V nach der grade entgegengesetzten Richtung V*v*. Dafern nun beyde Kräfte der Linie CM nach entgegengesetzten Seiten gleiche Umdrehungs-Beschleunigungen in gleichen Zeiten mittheilen würden; so müssen beyde Kräfte einander im Gleichgewicht erhalten. Denn der Punct M kann nicht gleiche, und entgegengesetzte Bogen in gleiche Zeiten beschreiben (48 §).

Dafern aber die Umdrehungs-Beschleunigungen ungleich sind, die jede dieser Kräfte für sich allein der Linie CM mittheilen würde: so erhalten die Kräfte einander nicht im Gleichgewicht.

Und daraus folgt umgekehrt: Wenn beyde Kräfte P und V, nach MT und V*v* in M und V angebracht, einander im Gleichgewicht erhalten; folglich CM.P = CV.V, ist (32 §. St.) so sind die Umdrehungs-Beschleunigungen gleich, die jede derselben

für

für sich allein, der Linie CM in einerley Zeit mittheilen würde.

158 §.

Es ist in einem beliebigen Punct *M* der Linie *CM* eine kleine körperliche Masse befindlich, und in einem von *M* verschiedenen Punct *V* eine Kraft *V* nach der senkrechten Richtung *Vu* angebracht; man frägt, wie stark die von dieser Kraft zuwege gebrachte Umdrehungs-Beschleunigung der Linie *CM* seyn werde. 158 Fig.

Aufl. Wäre eine Kraft P an der kleinen Masse M selbst nach paralleler Richtung angebracht: so wäre die Umdrehungs-Beschleunigung $= \frac{gP}{CM.M}$.

Aber wenn der in V angebrachten Kraft V Moment so groß ist, als das Moment der Kraft §, so ist die von V herrührende Umdrehungs-Beschleunigung, eben so groß (157 §). Demnach muß $P = \frac{CV.V}{CM}$ seyn, damit die Umdrehungs-Beschleunigungen für beyde Kräfte einerley werden, und die gesuchte Umdrehungs-Beschleunigung ist $= \frac{g.CV.V}{CM^2.M}$.

Wenn also γ die in der Zeit t der Linie CM mitgetheilte Winkelgeschwindigkeit ist: so hat man für jede Zeit t die Gleichung $\frac{d\gamma}{2dt} = \frac{\gamma CV.V}{CM^2.M}$, und man weiß aus dem 155 §, daß dies eigentlich ein mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebener Kreisbogen sey.

Demnach ist $\frac{d\gamma}{2dt}.CM = \frac{g.CV.V}{CM.M}$ die eigentliche

liche wahre Beschleunigung der Masse M, und diese verhält sich zur Beschleunigung der Schwere g, wie das Moment $CV.V$ der Kraft V zum Moment $CM.M$ des natürlichen Gewichts der Masse M. Man sucht hier aber nicht den Bogen selbst, durch welchen die kleine Masse M von der Kraft V beschleunigt wird; sondern den ihm ähnlichen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Bogen, und deswegen muß man mit dem Halbmesser CM dividiren.

Befände sich die Masse M in der Entfernung $CK = 1$ vom Bewegungspunct, und wäre an ihr nach einer auf CM senkrechten Richtung eine Kraft, die ihrem natürlichen Gewichte gleich ist, angebracht; so wäre ihre Beschleunigung $= g$, und dies wäre ein mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebener Bogen. Für eine andre Kraft P ist in eben dieser Entfernung die Beschleunigung $= \frac{gP}{M}$. Soll aber eine Kraft Q an eine gleiche Masse M in der Entfernung CM angebracht seyn, und die Linie CM nur um eben den Winkel, wie vorhin verrückt werden; so muß $P:Q = 1:CM$ (156 §), also $Q = P.CM$ seyn. Dies giebt für M die wahre Beschleunigung $\frac{gQ}{M} = \frac{g.P.CM}{M}$. Soll ferner eine Kraft V in der Entfernung CV die Masse M eben so stark beschleunigen: so muß $CM.Q = CV.V$; also $Q = \frac{CV.V}{CM}$ seyn, und die Beschleunigung ist $= \frac{g.CV.V}{CM.M}$, also das Maaß des Winkels,

um

um welchem sich CM in einer Secunde verrückt. $= \frac{g.CV.V}{CM^2.M}$, dafern nemlich V so lange unveränderlich bleibt.

159 §.

Wenn die Masse M weggenommen, und an stat ihrer in N eine andere kleine Masse $=N$ befindlich wäre: so würde die Umdrehungsbeschleunigung $= \frac{g.CV.V}{CN^2.N}$ seyn. Diese ist der vorigen gleich, wenn $CM^2.M = CN^2.N$ ist; oder wenn sich die Massen umgekehrt, wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Bewegungspunct verhalten. Man nennt dies Product der Masse in das Quadrat ihrer Entfernung vom Bewegungspunct, das Moment der Masse *M*; oder auch das Moment der Trägheit dieser Masse, und dies aus der eben vorgekommenen Ursache, weil Massen, die sich verkehrt wie die Quadrate dieser Entfernungen verhalten, von einer gegebenen Kraft V in einer gegebenen Entfernung CV, um gleiche Winkel beschleunigt werden. Wenn also die Masse M in der Entfernung CM von der Kraft V in der Entfernung CV beschleunigt wird: so verhält sich die Umdrehungsbeschleunigung zur Beschleunigung der Schwere, wie das Moment der Kraft V zum Moment der Trägheit der Masse M, und letzteres ist das natürliche Gewicht dieser Masse in das Quadrat ihrer Entfernung multiplicirt.

160 §.

Die Puncte *H, K, M, N* der unbiegsamen graden Linie *CN* sind kleine Massen, und in

158 Fig. V

V ist eine Kraft *V* nach der senkrechten Richtung *Vu* angebracht, welche die Linie *CM* dreher: man sucht die Umdrehungs-Beschleunigung.

Aufl. Es sey $\frac{d\gamma}{2dt}$ die gesuchte Beschleunigung Man nehme an, in M sey eine Kraft P nach MT angebracht, deren Winkelbeschleunigung ebenfalls $=\frac{d\gamma}{2dt}$: so hat man $\frac{d\gamma}{2dt}=\frac{g.P}{CM.M}$. Dafern nun an N, K, H, u. s. f. die Kräfte Q, R, S, u. s. f. auf CM senkrecht angebracht sind, und eine jede die Linie CM um eben den Winkel verrückt: so hat man auch $\frac{d\gamma}{2dt}=\frac{gQ}{CN.N}=\frac{gR}{CK.K}$, für die Kraft S aber $\frac{d\gamma}{2dt}=\frac{gS}{CH.H}$ (154 §). Dies giebt $P=\frac{d\gamma}{2gdt}CM.M$; $Q=\frac{d\gamma}{2gdt}CN.N$; $R=\frac{d\gamma}{2gdt}CK.K$; $S=\frac{d\gamma}{2gdt}CH.H$. Es sey Tf die mittlere Richtung der Kräfte P, Q, R, S u. s. f. so ist $CF\times(P+Q+R+S)=CM.P+CN.Q+CK.R+CH.S$, und die Summe aller Kräfte in F angebracht, strebt die Linie CM so stark zu drehen, als die einzelnen Kräfte in ihren Stellen thun (157 §). Damit nun die Kraft V in dem Punct V angebracht, eben die Gewalt ausübe, muß $CF(P+Q+R+S)=CV.V$ seyn, oder $CM.P+CN.Q+CK.R+CH.S=CV.V$. Man setze die gefundenen Wer-

che statt P, Q, R, S, u. s. f.: so erhält man

$$\frac{d\gamma}{2gdt}(CM^2.M+CN^2.N+CK^2.K+CH^2.H-\ldots)=CV.V,$$

und die gesuchte Beschleunigung

$$\frac{d\gamma}{2dt}=\frac{g.CV.V}{CM^2.M+CN^2.N+CK^2.K+CH^2.H}.$$

Wenn alle Puncte der Linie CM körperliche Massen sind: so wird der Nenner dieses Bruchs die Summe aller einzelnen Momente der Massen, und diese heist das Moment der Masse der ganzen Linie. Es verhält sich alsdenn die Umdrehungs-Beschleunigung zur Beschleunigung der Schwere, wie das Moment der Kraft V zum Moment der Masse der ganzen Linie CM.

Wenn in V eine Masse

$$=\frac{CM^2.M+CN^2.N+CK^2.K+CH^2.H}{CV^2}$$

befindlich, und sonst keine Masse vorhanden wäre: so wäre die Beschleunigung der Kraft V auf diese Masse

$$\frac{d\gamma}{2dt}CV=\frac{g.CV^2.V}{CM^2.M+CN^2.N+CK^2.K+CH^2.H}$$

und die Winkelbeschleunigung eben so groß, wie sie für die Linie CM gefunden worden, wenn die Massen M, N, u. s. f. an ihren Stellen bleiben.

161 §.

Diese im 157-160 § vorgetragenen Sätze lassen sich nun leicht allgemeiner machen, es mag sich eine Ebene um eine feste Axe drehen, die in dieser Ebene liegt, oder auf ihr senkrecht steht: (144. 148 §); oder es mag sich ein fester Körper von willkührlicher Gestalt und Grösse um eine unbewegliche Axe dre-

hen; so wird die Umdrehungs-Beschleunigung auf eine ähnliche Art gefunden, wenn die Umdrehung von einer oder mehrern gegebenen Kräften beschleunigt wird. Alle Puncte des Körpers gehen in Kreisen herum, die auf der Axe senkrecht sind. Man betrachte zuerst nur einen Punct M des Körpers, als eine körperliche Masse, und nehme an, es sey an demselben eine Kraft P nach der Richtung Mm angebracht, die auf CM senkrecht steht, und in der Ebene des auf die Axe senkrechten Kreises liegt, worin M herumläuft: so ist $\frac{d\gamma}{2dt}$ CM die Beschleunigung dieser Kraft, wenn $\frac{d\gamma}{2dt}$ den Winkel

162 Fig.

bedeutet, durch welchen CM in einer Secunde herum gehen würde, wenn P unveränderlich bliebe, und $\frac{d\gamma}{2dt} = \frac{gP}{CM.M}$, wie im 154 §. Wenn nun N ein andrer körperlicher Punct ist, und eine Kraft Q an demselben eben so angebracht worden; so ist die Umdrehungs-Beschleunigung für diesen Punkt $= \frac{gQ}{DN.N}$. Soll diese der vorigen gleich seyn: so muß $P:Q = CM.M:DN.N$ seyn, wie im 156 §. Wenn also alle Puncte des Körpers von Kräften getrieben werden, die sich wie die Producte aus den Massen dieser Puncte in die Entfernungen von der Axe verhalten: so ist die Umdrehungs-Beschleunigung für alle einerley; vorausgesetzt, daß die Richtungen dieser Kräfte alle auf die Entfernungen CM senkrecht sind, und in Ebenen liegen, welche die Axe senkrecht schneiden. Man siehet leicht, daß die Festig-

stigkeit des Körpers in der Bewegung dieser Puncte nichts ändern; sondern nur die Schwungkräfte aufhalten werde, die aus der Umdrehung ihren Ursprung haben.

162 §.

Eine Kraft V nach der Richtung V*v*, wie die vorigen, angebracht, ist mit allen an M, N, u. s. f. angebrachten Kräften im Gleichgewicht, wenn ihr Moment CV.V der Summe aller Momente jener Kräfte CM.P + DM.Q - - - u. s. f. gleich ist. (123 § St.). Und es erhellet, wie im 160 §, daß sie dem ganzen Körper eben die Umdrehungsbeschleunigung mittheile, welche jene Kräfte, jede an ihrer Masse angebracht, dem Körper mittheilen würden. Daher wird die Umdrehungs-Beschleunigung der Kraft V eben so, wie im 158 § gefunden. Wenn man nemlich annimmt, daß M, N, u. s. f. blos träge Massen sind: so werden die Kräfte P, Q, u. s. f. jeder dieser Massen, in einerley Zeit, einerley Umdrehungs-Beschleunigung mittheilen, wenn

$$P = \frac{d\gamma}{2gdt} CM.M; \quad Q = \frac{d\gamma}{2gdt} DN.N \text{ u. s. f.}$$

ist. Damit aber die in V nach der Richtung V*v* angebrachte Kraft V eben so beschleunige, muß CM.P + DN.Q - - - = CV.V seyn; folglich

$$\frac{d\gamma}{2dt} = \frac{g.CV.V}{CM^2.M + DN.N \text{ - - -}},$$ wo der Nenner die Summe aller Momente der Massen M, N, u. s. f. ist; und diese Summe heist hier das Moment der Trägheit, oder Masse des ganzen Körpers. Wenn man dies Moment der Trägheit so bezeichnet; $\int CM^2.M$: so ist die Umdrehungs-Beschleunigung $= \frac{g.CV.V}{\int CM^2.M}$.

Befän-

Befände sich in V eine Masse $= \frac{\int CM^2 . M}{CV^2}$: so wäre ihre Beschleunigung $= \frac{g . CV^2 . V}{\int CM^2 . M}$, und die Winkel-Beschleunigung der Linie CM wäre $= \frac{g . CV^2 . V}{\int CM^2 . M}$, welche mit der Umdrehungs-Beschleunigung des ganzen Körpers einerley ist.

163 §.

Wenn man diesen allgemeinen Ausdruck $\frac{dv}{dt} = \frac{2g . CV^2 . V}{\int CM^2 . M}$ auf besondere Fälle anwenden will: so bestehet eine der vornehmsten Schwürigkeiten darin, das Moment der Trägheit $\int CM^2 . M$ zu finden. Drehet sich ein fester Körper von gegebener Gestalt und Größe um eine feste Axe: so muß durch M ein verschwindendes Theilchen dieses Körpers, wie im 149 §, und durch CM sein Abstand von der Axe verstanden werden. Um davon im allgemeinen einen Begriff zu geben, setze man, es sey AB die Axe, um welche sich ein fester Körper drehet. Nun nehme man in derselben einen beliebigen Punct A, und setze AC auf AB senkrecht. Durch A sey überdem eine dritte grade Linie AD auf die Ebene BAC senkrecht gezogen: so sind die drey Ebenen BAC, BAD, DAC auf einander senkrecht. Wenn nun mit einer jeden dieser Ebenen, in sehr kleinen Entfernungen zu beyden Seiten, so viel neue Ebenen parallel gelegt werden, bis man über die Grenzen des Körpers hinauskommt: so vertheilt man ihn darauf in lauter kleine

161 Fig.

kleine in oder um denselben beschriebene Parallelepipeda, wie im 149 §, die zwar zusammen nicht den ganzen Umfang des Körpers ausmachen; ihm aber desto näher kommen, je näher die parallelen Ebenen einander gelegt werden. Nimmt man ferner an, die ganze Masse eines jeden dieser Parallelepipeden, sey in dem Endpunct seiner Entfernung von der Axe beysammen: so ist die Summe aller Producte aus den Massen dieser körperlichen Theilchen in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe zwar nicht völlig einerley mit dem Moment der Trägheit des Körpers. Indessen nähert sich diese Summe dem Moment der Trägheit desto mehr, je kleiner die Theilchen werden. Das wahre Moment der Trägheit ist die Gränze, der sich jene Summen desto mehr nähern, je kleiner die körperlichen Theilchen werden. Es ist unter allen diesen Summen die letzte. Summen von dieser Art werden durch die Integralrechnung gefunden, nud deswegen läst sich die allgemeine Theorie vom Moment der Trägheit hier noch nicht vollständig abhandeln. Inzwischen wird doch in den folgenden Sätzen so viel davon vorgetragen werden, als man wissen muß, um auf einige der leichtesten Fälle die Anwendung zu machen.

164 §.

Es ist das Moment der Trägheit eines festen Körpers in Ansehung einer gewissen Axe *EF* gegeben; man sucht das Moment der Trägheit eben dieses Körpers in Ansehung einer andern Axe *ef*, die mit der vorigen parallel liegt. 162 Fig.

Aufl. Es sey DH eine Ebene durch beyde parallele Axen, und z ein willkührlicher Punct des Kör-

pers, dessen Masse als ein Differential der ganzen betrachtet und $= dM$ gesetzt werden kann. Durch z sey eine Ebene AB auf die Axe EF senkrecht gesetzt. Diese wird auch auf *ef* (307 §. G.) und auf der Ebene der Axen DCH senkrecht seyn (315 § G.) Wenn nun CH die Durchschnittslinie ist: so sey ZK auf CH senkrecht. Man setze $CK = y$, $KZ = z$: so hat man $CZ^2 = yy + zz$. Das Moment der Trägheit der unendlich kleinen Masse Z wird $= (yy+zz)dM$ und das Integral $\int(yy+zz)dM$, drückt das Moment der Trägheit des ganzen Körpers, in Ansehung der Axe EF aus.

Wenn die ganze Masse M in einem einzigen Puncte vereiniget, und seine Entfernung von der Axe $= k$ wäre: so würde das Moment dieser Masse $= Mkk$ seyn. Da nun vermöge der Voraussetzung $\int(yy+zz)dM$ bekannt ist; so kann man dies Integral $= Mkk$ setzen, und es wird $kk = \frac{\int(yy+zz)dM}{M}$

Auf solche Art läst sich also diejenige Entfernung *k* von der Axe finden, in welcher die Masse M, wenn sie in einem Punct vereinigt wäre, ein eben so grosses Moment der Trägheit haben würde, als sie jetzt hat, da sie durch den Raum des Körpers ausgebreitet ist. Nun sey die Entfernung Cc beyder Axen $= b$: so ist $cK = CK - Cc = y - b$, und $cZ^2 = (y-b)^2 + zz$; folglich das Moment der Trägheit der unendlich kleinen Masse Z gegen die Axe $Ef = \int cZ^2 . dM = \int((y-b)^2 + zz)\,dM = \int yyd\,M - \int 2byd\,M + \int bbdM + \int zzdM$ (111 §). Da nun $\int yydM + \int zzdM = \int(yy+zz)\,dM = Mkk$, $\int bbdM = bb.M$, und $\int 2bydM = 2b\int ydM$ (110 §), so wird das gesuchte Moment der Trägheit $= Mkk - 2b\int ydM + bb.M$.

Es

Es sey G des Körpers Schwerpunct; und durch denselben eine Ebene auf EF senkrecht gelegt, welche die Ebene der Axe DCH in D*d* schneidet: so ist D*d* mit C*c* parallel, und D*d* = C*c* = *b*. Auf D*d* sey GQ senkrecht, und man stelle sich durch EF eine Ebene RS vor, die auf DCH senkrecht ist: so ist *yd*M das statische Moment der unendlich kleinen Masse *d*M gegen diese Ebene RS (150 §) und *syd*M = DQ.M. Also erhält man für das gesuchte Moment der Trägheit gegen die Axe *ef*, den Ausdruck M*kk* − 2*b*.DQ.M + M*bb* = M*kk* + (*bb* − 2*b*.DQ)M. Aber *d*Q = DQ − *b*, also *d*Q² = DQ² − 2*b*.DQ + *bb*, und *bb* − 2*b*.DQ = *d*Q² − DQ². Daher erhält man M*kk* + (*bb* − 2*b*.DQ)M = M*kk* + (*d*Q² − DQ²)M. Nun ist ferner *d*Q² = *d*G² − GQ², und DQ² = DG² − GQ². Dies giebt *d*Q² − DQ² = *d*G² − DG², und M*kk* + (*d*Q² − DQ²)M = M*kk* + (*d*G² − DG²)M für das gesuchte Moment der Trägheit.

Wenn die Axe EF durch den Schwerpunct G selbst durchgehet: so ist DG = o, und das Moment der Trägheit gegen die Masse *ef* = M*kk* + *d*G².M.

Durch diese Regel wird die Berechnung des Moments der Trägheit in besondern Fällen sehr erleichtert, weil das Moment der Trägheit eines Körpers in Ansehung einer durch den Schwerpunct geführten Axe gewöhnlich leichter gefunden wird, als wenn man das Moment der Trägheit desselben Körpers gegen eine Axe, die nicht durch den Schwerpunct gehet, aus der allgemeinen Formul $\int(yy+zz)dM$, unmittelbar suchen wollte. Soll man nemlich das Moment der Masse eines Körpers in Ansehung einer gegebenen Axe suchen: so zieht man durch den Schwerpunct eine neue Axe mit der gegebenen parallel,

rallel, berechnet das Moment gegen diese durch den Schwerpunct geführte Axe, und addirt dazu ein Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat der Entfernung der gegebenen Axe vom Schwerpunct: so hat man das Moment der Trägheit für die gegebene Axe gefunden.

165 §.

163 Fig. Es sey *AB* eine sehr dünne grade Stange, aus einer gleichartigen Masse, die man als eine körperliche Linie in dem Verstande des 69 §. St. betrachten kann; *G* ist ihr Schwerpunct, wodurch die Axe *EF* senkrecht auf *AB* gehet. Diese Linie *AB* drehet sich um die Axe *EF*; man sucht ihr Moment der Trägheit für diese Axe.

Aufl. Es sey δ das natürliche Gewicht eines Fusses von dieser Linie, oder ihre Dichtigkeit, die hier der Länge proportional ist: so wird die Masse M der ganzen Linie AB $=$ 2δ. GB, weil G in der Mitte liegt. Es sey x ein verschwindendes Theilchen dieser Linie; seine Entfernung von G sey $=$ GZ $=$ x: so ist seine Masse $=$ $\delta . dx$, und sein Moment der Trägheit $=$ $\delta . xxdx$. Dies giebt das Moment der Trägheit für das Stück GZ $=$ $\delta \int xxdx = \frac{1}{3}\delta x^3$ (110 §), und wenn man $x = a =$ GB setzt: so erhält man $\frac{1}{3}\delta a^3$ für das Moment der Trägheit von GB. Eben so groß ist das Moment von GA; also das Moment der ganzen Linie AB $=$ $\frac{2}{3}\delta a^3 = \frac{1}{3}Maa$, weil $M = 2\delta a$. Ist die ganze Länge AB $=$ b; so hat man $b = 2a$, und das Moment $= \frac{1}{12}Mbb$.

Für eine andre Axe *ef*, die mit EF in der Entfernung CG $=$ f parallel ist, wird das Moment der Träg-

Trägheit $= (ff + \frac{1}{3}aa)M$ (164 §), und wenn *ef* durch A gehet, also $f = a$ ist; so wird dies Moment $= \frac{4}{3}aaM = \frac{1}{3}Mbb = \frac{1}{3}AB^2 . M$, weil $a = \frac{1}{2}b$.

166 §.

Es sey *ADBH* eine hole kugelförmige Flä- 164
che, von gleichförmiger Dichtigkeit. Sie sey Fig
so dünne, daß man ihre Dicke bey Seite setzen, und die kugelförmige Schale als eine Kugelfläche betrachten kann, deren Masse ihrer Grösse proportional ist: man sucht das Moment der Trägheit dieser Kugelfläche gegen eine Axe *AB*, die durch ihren Mittelpunct G gehet.

Aufl. Durch einen Punct M dieser Kugelfläche, deren Halbmesser $= a$ sey, lege man eine Ebene auf AB senkrecht, welche die Axe in P, und die Ebene des grösten Kreises durch M und AB in MPN schneidet; so ist PM der Halbmesser eines der Axe AB zugehörigen Parallelkreises, worin M herumläuft. Weil nun ADBH ein grösster Kreis durch die Axe AB, und *Mm* ein kleiner Bogen dieses grösten Kreises ist: so beschreibt *Mm* eine Zone der Kugel: und wenn *m*R auf PM senkrecht ist; so ist dieser Zone Oberfläche $= 2\pi . a . Rm$, und ihre Masse $= 2\delta\pi . a . Rm$, wenn δ das Gewicht eines Quadratfusses ist (622 §. G.) Man setze $GP = x$: so wird $Rm = Pp = \Delta x$, und die Oberfläche des Kugelschnitts MAN ist eine Function von x, die um die Zone $2\pi . a . \Delta x$ anwächst, wenn x um das Stück $Pp = \Delta x$ wächst. Das Moment der Trägheit der von *Mm* beschriebenen Zone ist die Differenz des Moments der Trägheit der ganzen Fläche des Abschnitts MAN (102 §).

Es sey das Moment der Trägheit der Fläche MAN $= \mu$: so ist $\Delta\mu < PM^2 . 2\delta\pi a\Delta x$, und $\Delta\mu > pm^2 . 2\delta a\pi\Delta x$, also $\frac{\Delta\mu}{\Delta x} < PM^2 . 2\delta a\pi$, und $\frac{\Delta\mu}{\Delta x} > pm^2 . 2\delta a\pi$. Beyde Grenzen nähern sich desto mehr, je kleiner Δx genommen wird, und werden gleich, wenn Δx verschwindet, und $pm = PM$ wird; also erhält man $\frac{d\mu}{dx} = PM^2 . 2\delta a\pi =$ $2\delta a\pi (aa - xx)$, oder $d\mu = 2\delta a^3 \pi dx - 2\delta a\pi x^2 dx$. Demnach giebt die Integration nach dem 110 § $\mu =$ $2\delta a^3 \pi x - \frac{2}{3}\delta a\pi x^3 + B$. Nun muß $\mu = 0$ seyn für $x = -GA = -a$. Dies giebt $0 = -2\delta\pi a^4 + \frac{2}{3}\delta\pi a^4 = -\frac{4}{3}\delta\pi a^4 + B$, also $B = \frac{4}{3}\delta\pi a^4$, und $\mu = \delta(\frac{4}{3}\pi a^4 + 2a^3\pi x - \frac{2}{3}a\pi x^3)$. Man setze $x = a$: so erhält man das Moment der Trägheit für die ganze Kugelfläche $= \frac{8}{3}\pi\delta a^4$. Die Masse M der Kugelfläche ist $= 4\delta\pi aa$, also wird dies Moment $= \frac{2}{3}Maa$.

167 §.

164 Fig. Es sey *EKFL* eine feste Kugel von gleichförmiger Dichtigkeit, sie drehe sich um eine Axe *EF* durch ihren Mittelpunct G; man sucht ihr Moment der Trägheit gegen diese Axe.

Aufl. Es sey M ein Punct innerhalb der Kugel, und sein Abstand GM vom Mittelpunct sey $= z$: so ist das Moment der Trägheit aller Puncte, die eben so weit von G entfernt sind, und in der Kugelfläche ADBH liegen $= \frac{8}{3}\delta\pi z^4$ (166 §). Wächst nun GM um das Stück $MZ = \Delta z$, und man stel-

let

let sich durch z eine neue Kugelfläche um G vor: so ist ihr Moment der Trägheit $= \frac{8}{3}\delta\pi(z+\Delta z)^4$. Nun erhellet aber, es sey das Moment der Trägheit der körperlichen Schale zwischen beyden Kugelflächen die Differenz des Moments der Kugel ADBH in dem Verstande des 102 § in so ferne es als eine Function von $GM = z$ betrachtet wird. Das Moment der Kugel sey μ: so wird $\Delta\mu > \frac{8}{3}\delta\pi z^4\Delta z$ und $\Delta\mu < \frac{8}{3}\delta\pi(z+\Delta z)^4\Delta z$, oder $\frac{\Delta\mu}{\Delta z} > \frac{8}{3}\delta\pi z^4$, und $\frac{\Delta\mu}{\Delta z} < \frac{8}{3}\pi(z+\Delta z)^4$. Beyde Grenzen gehen zusammen, wenn Δz verschwindet, und man erhält $\frac{d\mu}{dz} = \frac{8}{3}\delta\pi z^4$, also $\mu = \int\frac{8}{3}\delta\pi z^4 dz = \frac{8}{15}\delta\pi z^5$, wo keine constans hinzukommt, weil für $z = 0$ auch $\mu = 0$ seyn muß. Man setze $z = a$: so hat man für die ganze Kugel das Moment $= \frac{8}{15}\delta\pi a^5$, und weil die Masse der Kugel $M = \frac{4}{3}\delta\pi a^3$ ist: so wird dies Moment $= \frac{2}{5}Maa$.

168 §.

Ein fester Körper bestehet aus zweenen Theilen, deren Schwerpuncte g und γ, und die Massen A und B, sind die Momente der Trägheit beyder Theile sind gegeben, und zwar für jeden Theil in Ansehung einer Axe AB die durch seinen Schwerpunct gehet, und mit der Axe des andern CD parallel ist: man soll das Moment der Trägheit des ganzen Körpers suchen für eine Axe EF, die durch des ganzen Körpers Schwerpunct G gehet, und mit den vorigen beyden parallel ist. 165 Fig.

Aufl. Das Moment des einen Theils gegen die Axe AB sey $=$ Acc, und des andern gegen die Axe CD $=$ Bee. Der Abstand $g\gamma$ der Schwerpuncte beyder Theile sey $= h$: so liegt der Schwerpunct G des ganzen Körpers in $g\gamma$, und es ist $gG = \frac{B.h}{A+B}$, $\gamma G = \frac{A.h}{A+B}$. Es schneide $g\gamma$ die Axen unter dem Winkel $gGE = \alpha$: so ist die Entfernung der Axen AB und $EF = \frac{B.h.\sin\alpha}{A+B}$, folglich das Moment der Trägheit des Theils A gegen die Axe $EF = Acc + \frac{A.B^2.h^2\sin\alpha^2}{(A+B)^2}$. Weiter ist die Entfernung der Axen CD, und $EF = \frac{A.h.\sin\alpha}{A+B}$, also das Moment der Trägheit des Theils B gegen die Axe $EF = Bee + \frac{B.A^2.h^2.\sin\alpha^2}{(A+B)^2}$. Beyde zusammen geben das Moment des ganzen Körpers gegen die Axe $EF = Acc + Bee + \frac{A.B.h^2.\sin\alpha^2}{A+B}$.

Ist also das Moment des ganzen Körpers $= Mkk$: so wird $Mkk = Acc + Bee + \frac{A.B.h^2\sin\alpha^2}{A+B}$, und wenn ausser dem Moment des ganzen Körpers das Moment des einen Theils Acc gegeben ist; so giebt die Gleichung $Bee = Mkk - Acc - \frac{A.B.h^2.\sin\alpha^2}{A+B}$ das Moment des andern Theils, wenn die Axen durch

durch die Schwerpuncte gehen, und unter sich paralel sind.

169 §.

Es ist diese Aufgabe zwar auf den Fall besonders eingeschränkt, wenn die neue Axe, um welche sich der Körper drehen soll, durch seinen Schwerpunct gehet: allein sie läst sich allgemeiner auch auf die Fälle anwenden, wenn die Axe des ganzen Körpers nicht durch den Schwerpunct gehet, dafern sie nur mit den Axen der Theile parallel ist. Sind M, N, die Massen, *Mmm*, *Nnn*, die Momente der Theile, *a* und *b* aber die Entfernungen ihrer Axen von der Umdrehungsaxe des ganzen Körpers: so ist des ganzen Körpers Moment der Trägheit $= M(mm+aa) + N(nn+bb)$.

Eben dies findet noch statt, wenn der Körper aus mehr als zweenen Theilen bestehet, deren Massen M, N, P, Q u. s. f. sind, und man kennet die Momente der Trägheit dieser Theile in Ansehung solcher Axen, die durch dieser Theile Schwerpuncte gehen, und insgesamt einander parallel sind. Man kan nemlich daraus auf ähnliche Art das Moment der Trägheit des ganzen Körpers für jede Axe finden, die mit den vorigen parallel ist. Wenn nemlich die Momente der Theile *Mmm*, *Nnn*, *Ppp*, *Qqq* u. s. f. sind, und es sind *a*, *b*, *c*, *d*, u. s. f. die Entfernungen ihrer Axen von der Umdrehungsaxe des ganzen Körpers: so ist des ganzen Körpers Moment der Trägheit $= M(mm+aa) + N(nn+bb) + P(pp+cc) + Q(qq+dd)$ u. s. f.

170 §.

170 §.

An der Kugel *BHI* ist bey *B* eine sehr dünne Stange *AB* senkrecht auf die Kugel befestigt, so daß die verlängerte Stange durch der Kugel Mittelpunct gehen würde. Die Stange ist bey *C* so befestigt, daß sie sich mit der Kugel um eine Axe *EF* drehen kan, die auf der Stange senkrecht ist: man sucht das Moment der Masse des aus beyden Theilen zusammengesetzten Körpers.

Aufl. Der Kugel Schwerpunct ist ihr Mittelpunct *g*; und wenn man ihren Halbmesser $= a$, ihre Masse $= M$ setzt; so ist für eine durch *g* mit EF parallele Axe, ihr Moment der Trägheit $= \frac{2}{5} Maa$ (167 §). Die Länge AB der Stange sey $= b$, ihr Schwerpunct γ, ihre Masse $= N$: so ist ihr Moment für eine durch γ mit EF parallele Axe $= \frac{1}{12} Nbb$ (165 §). Demnach wird des ganzen Körpers Moment der Trägheit für die Axe EF $= M(\frac{2}{5} aa + Cg^2) + N(\frac{1}{12} bb + C\gamma^2)$. Man setze $CB = c$: so wird $Cg = a + c$, $C\gamma = c - \frac{1}{2} b$, und das gesuchte Moment $= M(\frac{2}{5} aa + (a+c)^2) + N(\frac{1}{12} bb + (c - \frac{1}{2} b)^2)$ $= M(\frac{7}{5} aa + 2ac + cc) + N(cc - bc + \frac{1}{3} bb)$.

Der XI. Abschnitt.

Vom Schwunge der zusammengesetzten Pendul.

171 §.

166 Fig. Ein schwerer fester Körper von willkührlicher Gestalt und Grösse, wie ADBHI, den man in C so

so aufhängt, daß sich derselbe um eine horizontale Axe EF frey drehen kan, heist ein zusammengesetztes Pendul. Es hat dieser Nahme daher seinen Ursprung, weil man alle Puncte des Körpers als Gewichte betrachten muß, wenn man die Gesetze der Schwungbewegung solcher schweren Körper richtig bestimmen will, statt dessen, daß anfangs im 129 § nur ein einziger Punct des Körpers als ein Gewicht betrachtet ward.

172 §.

Alle körperliche Puncte des zusammenge- 166
setzten Penduls *ADBHI* werden von unver- Fig.
änderlichen Kräften nach der verticalen Richtung *CD* getrieben, und der Winkel $DCG = \alpha$ ist gegeben, um welchen das Pendul gehoben worden. Das Pendul ist aus der Lage *CG* in die Lage *CM* gekommen: man sucht die Winkelgeschwindigkeit; vorausgesetzt, daß man das Pendul aus der Lage *CG* habe frey fallen lassen.

Aufl. Die mittlere Richtung aller Kräfte geht durch den Schwerpunct G, des Penduls; und wenn man die Summe aller $= P$ setzt: so ist es eben so viel, als wenn allein im Schwerpunct G eine Kraft $= P$ nach der verticalen Richtung GV angebracht wäre. Ist nun die Linie CG in die Lage CM gekommen: so ist der Schwerpunct G den Bogen GM $= s$ durchlaufen. Man setze den Winkel DCM $= \varphi$: so zerlegt sich die Kraft P nach den Richtungen der Tangente MT, und der Richtung MR auf MT senkrecht, in die Kräfte $P \sin\varphi$ und $P \cos\varphi$, da dann die letzte blos die Axe drückt. Jene $P \sin\varphi$ nach der Richtung MT beschleunigt die Bewegung. Wenn

nun

nun des ganzen Penduls Moment der Masse für eine horizontale Axe durch seinen Schwerpunct $= Mkk$ ist: so wird eben dieses Penduls Moment der Trägheit für die Axe EF $= M(CG^2 + kk)$ (164 §), und man weiß aus dem 160 §, daß die Kraft P $\sin\varphi$ die Bewegung eben so beschleunige, als wenn in dem Punct G die Masse $\frac{M.(CG^2+kk)}{CG^2}$ vereinigt wäre. Ist also nunmehro des Schwerpuncts Geschwindigkeit in M $= c$, und der Bogen PM $= s$: so hat man nach dem 112ten §, $2cdc = \frac{4g.CG^2.P\,sin\varphi}{M(CG^2+kk)}ds$. Dieser Ausdruck kommt mit demjenigen völlig überein, der im 130 § die Aenderung der Geschwindigkeit des einfachen Penduls ausdrückte: nur daß man $\frac{M(CG^2+kk)}{CG^2}$ $= \frac{M.(CM^2+kk)}{CM^2}$ statt des dortigen M schreiben, und CM statt a setzen muß. Man setze nun CG $=$ CM $= f$, also f statt a, und $\frac{M(ff+kk)}{ff}$ statt M in dem Ausdruck $c = 2r\frac{agP}{M}(\cos\varphi - \cos\alpha)$ des 130 §: so wird

$$c = 2f\sqrt{\frac{fgP}{M(ff+kk}}(\cos\varphi - \cos\alpha) =$$

$$2fr\frac{2fgP}{M(ff+kk)}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\varphi)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\varphi),$$

wor-

woraus sich die Winkelgeschwindigkeit $\frac{c}{f} = \gamma$ ergiebt.

173 §.

Aus dieser Formul folgt, daß die Sätze, welche im 131 § für das einfache Pendul bewiesen sind, mit gehöriger Veränderung auch für das zusammengesetzte Pendul gelten. Wenn G in der Verticallinie CD ankomt; so ist $\varphi = 0$, und $\frac{c}{f} = 2\sqrt{\frac{fgP}{M(ff+kk)}}(1-\text{col}\alpha)$. Das Pendul muß nun die Bewegung nach der andern Seite der Verticallinie fortsetzen, doch so, daß die Winkelgeschwindigkeit wieder abnimmt. Bey gleichen Abweichungen von der Verticallinie sind zu beyden Seiten die Winkelgeschwindigkeiten gleich, und der Schwerpunct G steigt wieder so hoch, als er gefallen war. Demnach würde sich auch das zusammengesetzte Pendul ohne Aufhören hin und her schwingen, wenn es sich völlig frey um seine Axe drehen könnte, und sonst kein Widerstand die Bewegung verzögerte.

Man kann die Geschwindigkeit des Schwerpuncts auch so ausdrücken: $c = 2f.\sqrt{\frac{gP}{M(ff+kk)}}.DP$;

oder auch $c = \frac{2f}{\sqrt{(ff+kk)}}\sqrt{\frac{gP}{M}}.DP$, weil $DP = f(\text{sinv}\,\alpha - \text{sinv}\,\varphi) = f(\text{col}\varphi - \text{col}\alpha)$. Daraus ergiebt sich, daß der Schwerpunct bey einerley Winkel φ nicht eben die Geschwindigkeit habe, die derselbe haben würde, wenn die ganze Masse in G

vereinigt wäre. Oder mit andern Worten: Die Bewegung eines einfachen Penduls, dessen Länge $= f$ wäre, kommt mit der Bewegung dieses zusammengesetzten Penduls nicht überein.

Des einfachen Penduls Winkelgeschwindigkeit wäre $= \frac{2}{f}\sqrt{\frac{fgP}{M}}(\mathrm{col}\varphi - \mathrm{col}\alpha)$, und des zusammengesetzten

$$= \frac{2}{\sqrt{(ff+kk)}}\sqrt{\frac{fgP}{M}}(\mathrm{col}\varphi - \mathrm{col}\alpha).$$

Beide verhalten sich, wie $\frac{1}{f} : \frac{1}{\sqrt{(ff+kk)}} = \sqrt{(ff+kk)} : f$.

Daher ist des einfachen Penduls Geschwindigkeit, bey einerley Elongation von der Verticallinie, grösser als des zusammengesetzten. Weil nun längere einfache Pendul langsamer oscilliren, als kürzere, wie der Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{2}{\sqrt{f}}\sqrt{\frac{gP}{M}}(\mathrm{col}\varphi - \mathrm{col}\alpha)$ ergiebt: so siehet man wohl, daß ein einfaches Pendul länger seyn müste, als die Entfernung des Schwerpuncts des zusammengesetzten Penduls von der Axe, wenn bey gleicher anfänglichen Elongation von der Verticallinie auch nachher beständig bey einerley Elongation von der Verticallinie die Winkelgeschwindigkeiten gleich seyn sollen.

174 §.

Die Länge des einfachen Penduls, das die eben erwähnten Eigenschaften hat, zu finden.

Aufl. Es sey die gesuchte Länge $= l$, für das zusammengesetzte Pendul der Abstand des Schwer-

puncts

puncts von der Axe $= f$; so ist des einfachen Penduls Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2}{\sqrt{l}}\sqrt{\frac{gP}{M}}(\cos\varphi - \cos\alpha)$, und für das zusammengesetzte ist sie $= \frac{2\sqrt{f}}{\sqrt{(ff+kk)}}\cdot\sqrt{\frac{gP}{M}}(\cos\varphi - \cos\alpha)$. Beyde sollen für einerley α und φ gleich groß seyn. Dieser Voraussetzung gemäß wird $\frac{1}{\sqrt{l}} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(ff+kk)}}$, oder $l = \frac{ff+kk}{f} = f + \frac{kk}{f}$.

175 §.

Beyde diese Pendul werden sich in gleichen Zeiten durch gleiche Winkel schwingen, wenn sie zugleich in in einerley Elongation von der Verticallinie ihre Schwingungen anfangen. Man setze nemlich, beyde befinden sich in einerley Elongation φ von der Verticallinie; so ist die Winkelgeschwindigkeit $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$ für beyde einerley, und es wird für beyde $dt = \frac{d\varphi}{\gamma}$. Setzt man also $\frac{2}{\sqrt{l}}\cdot\sqrt{\frac{gP}{M}} = \frac{2\sqrt{f}}{\sqrt{(ff+kk)}}\cdot\sqrt{\frac{gP}{M}} = k$: so hat man für beyde Pendul $dt = \frac{d\varphi}{K\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$, und die Integration giebt für beyde einerley Gleichung zwischen t und φ, nemlich $t = \int \frac{d\varphi}{K\sqrt{(\cos\varphi - \cos\alpha)}} + B$

wo für beyde Pendul die constans B so genommen werden muß, daß $t = 0$ für $\varphi = \alpha$ wird.

Ein einfaches Pendul also, dessen Länge $l = f + \frac{kk}{f}$ ist, wird sich in jeder Zeit t durch einen eben so grossen Winkel bewegen, wie das zusammengesetzte in eben der Zeit, und beyde Pendul werden ihre ganzen Schwünge in gleichen Zeiten endigen. Beyde sind Pendula isochrona.

176 §.

Man nehme nun $CO = f + \frac{kk}{f}$, also $GO = \frac{kk}{f}$: so erhellet, wenn die ganze Masse des zusammengesetzten Penduls in dem Punct O vereiniget wäre, daß die Bewegung dieses einfachen Penduls völlig mit der Bewegung des zusammengesetzten ADBHI, dessen Masse durch seinen körperlichen Raum verbreitet ist, übereinkommen würde. Dieser Punct O heist der Mittelpunct des Schwunges des zusammengesetzten Penduls (Centrum oscillationis).

Es ist also dieses Puncts O Entfernung von der Umdrehungsaxe des zusammengesetzten Penduls, leicht zu finden, wenn man das Moment der Trägheit Mkk des Penduls für eine Axe kennet, die durch seinen Schwerpunct mit der Umdrehungsaxe parallel geht, und überdem die Entfernung f des Schwerpuncts von der Umdrehungsaxe. Aus der Gleichung $CO = f + \frac{kk}{f} = \frac{M(ff + kk)}{M.f}$ folgt die gewöhnliche Regel: Man

Man dividire das Moment der Trägheit des Penduls für die Umdrehungsaxe durch das statische Moment seines Gewichts in Ansehung eben der Axe: so giebt der Quotient den gesuchten Abstand für den Mittelpunct des Schwunges.

177 §.

Wenn eben das Pendul in einem andern Puncte c der Linie CG aufgehangen wird, und nun ω der Mittelpunct des Schwunges ist: so hat man $G\omega = \frac{kk}{cG}$. Da nun $GO = \frac{kk}{CG}$ ist: so wird $G\omega$. $cG = kk = GO.CG$. Daher sind die Entfernungen der Mittelpuncte des Schwunges O, ω, vom Schwerpunct den Entfernungen des Schwerpuncts von der zugehörigen Axe umgekehrt proportional.

Würde demnach das Pendul in O aufgehängt: so wäre C der Mittelpunct des Schwunges. Denn er sey c: so hat man $Gc = \frac{kk}{GO}$. Hängt aber das Pendul in C: so ist $GO = \frac{kk}{GC}$; also auch $GC = \frac{kk}{GO}$, und $GC = Gc$, folglich muß C in c fallen.

178 §.

Durch diese Vergleichung der Bewegung des zusammengesetzten Penduls mit der Bewegung eines einfachen wird die ganze Theorie von den Schwingungen solcher Pendul, die eine gegebene Gestalt und Grösse haben, auf die Theorie der einfachen Pendul zurückgeführt, und es sind alle Lehren, die oben vom 131 § bis zum 136 § erwiesen worden,

auch für zusammengesetzte Pendul wahr, wenn durch die Länge derselben die Entfernung des Mittelpuncts des Schwunges von der Umdrehungsaxe verstanden wird.

Huygen hat diese Theorie vom Mittelpunct des Schwunges erfunden, und in dem berühmten Tractat Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad Horologia aptato demonstrationes geometricæ, im Jahr 1673 bekannt gemacht, nachdem er schon vorher im Jahr 1656 zuerst die Pendul-Uhren erfunden, und ihre Einrichtung im Jahr 1657 in einer kleinen Abhandlung unter dem Titel: Horologium beschrieben hatte. Weil er seine Theorie auf eine Voraussetzung gegründet hatte, die nicht allen evident genug zu seyn schien: so waren andre bemüht, sie auf andre Gründe zu bauen, und beyde Herrn Brüder, Jacob und Johann Bernoulli suchten die Huygenische Theorie zu verbessern. Man sehe Opera Jac. Bernoulli n. 98. Opera Joh. Bernoulli T. II. n. 96. T. IV. n. 177. Die allgemeine Theorie von der Umdrehung fester Körper um eine unbewegliche Axe, wovon das gegenwärtige nur eine besondre Anwendung ist, hat Hr. Euler in verschiedenen Aufsätzen zu ihrer Vollkommenheit gebracht, und am ausführlichsten in seiner Theoria motus corporum solidorum 1765 cap. II-VII. abgehandelt.

179 §.

Das Pendul *ADBHI* bestehet aus einer Kugel *BHI*, und einer an derselben befestigten Stange *AB*, die sich bey *C* um eine horizontale Axe drehet. Die Stange hat eine so geringe Dicke, daß man sie als eine schwere Li-

nie betrachten kann: man soll für dies Pendul den Mittelpunct des Schwunges finden.

Aufl. Der Halbmesser der Kugel sey $= a$, die Länge der Stange $= b$, der Abstand der Axe EF von der Stange Endpunct B, nemlich $CB = c$, der Kugel Gewicht $= M$, der Stange Gewicht $= N$: so ist dieses Penduls Moment der Trägheit $= M(\frac{7}{5}aa + 2ac + cc) + N(cc - bc + \frac{1}{3}bb)$ (170 §.) Weiter sey G der Kugel und der Stange gemeinschaftlicher Schwerpunct, so wie g der Kugel, und γ der Stange Schwerpunct ist; so hat man $CG(M+N) = Cg.M + C\gamma.N = (a+c)M + (c - \frac{1}{2}b)N$, und dies giebt nach der Regel des 176 §

$$CO = \frac{M(\frac{7}{5}aa + 2ac + cc) + Ncc - bc + \frac{1}{3}bb}{M(a+c) + N(c - \frac{1}{2}b)}.$$

Wäre das Pendul am äussersten Ende der Stange A aufgehangen: so wäre $c = b$, und man erhielte

$$CO = \frac{M(\frac{7}{5}aa + 2ab + bb) + \frac{1}{3}Nbb}{M(a+b) + \frac{1}{2}Nb}.$$

Eben diese Formul kann man brauchen, wenn CB ein Faden ist, woran die Kugel hängt.

Wenn aber AB ein Faden ist von einem sehr geringen Gewicht in Vergleichung mit dem Gewicht der Kugel; so kann man $N = o$ setzen, und man erhält

$$CO = \frac{\frac{7}{5}aa + 2ab + bb}{a+b} = \frac{(a+b)^2 + \frac{2}{5}aa}{a+b}$$

$$= a + b + \frac{\frac{2}{5}aa}{a+b}.$$

Es sey die Kugel 60 mahl schwerer, als die Pendulstange, und $a = \frac{1}{12}$ Fuß, $b = c = 3$ Fuß; so giebt die Rechnung $a + b = 3\frac{1}{12}$; $(a+b)^2 = 9\frac{7}{144}$; $\frac{2}{5}aa + (a+b)^2 = 9\frac{36}{70}$; $60 \times (\frac{2}{5}aa + (a+b)^2)$

$= 570\frac{7}{12}$; also $CO = \frac{573\frac{7}{12}}{186\frac{1}{2}} = \frac{6883}{2238} =$

3,0755 Fuß.

180 §.

Hieraus ergiebt sich nun, wie man die Beobachtung im 135 § eigentlich anstellen müsse, um daraus nach dem 136 §. die Länge eines Penduls zu schliessen, dessen kleinste Schwingungen eine Secunde dauren. Man kann kein andres, als ein zusammengesetztes Pendul zu dem Versuch erwählen. Daher muß man für ein solches, zu der Beobachtung erwähltes Pendul, zuförderst den Mittelpunct des Schwunges suchen, und dessen Abstand von der Umdrehungsaxe für die Länge des Penduls annehmen, da dann das übrige so bewerkstelliget wird, wie im 136 § bereits gewiesen worden.

Wäre die Schwere auf dem ganzen Erdboden, einerley: so würde auf solche Art durchgängig einerley Länge des Secunden-Penduls gefunden werden, und man könnte dies Pendul gebrauchen, ein allgemein übereinstimmiges Fußmaaß einzuführen. Huygenius schlug hiezu den dritten Theil eines Secunden-Penduls vor, weil er die Länge dieses Penduls nicht viel grösser als von drey Pariser Fussen befand. Er schliest aus seinen angestellten Beobachtungen: der allgemeine Fuß werde sich zum Pariser verhalten, wie 881 : 864 (Horol. Oscill. P. I. Oper. Vol. I. p. 36. et P. IIII. Prop. 25. Oper. Vol. I p. 178). Dies giebt für den allgemeinen Fuß nach Pariser Maaß 12 Zoll 2 Lin. $8\frac{1}{3}$ Scrupel, 10 Scrupel auf eine Linie gerechnet. Eben diese Zahl mit 3 multiplicirt, giebt also nach Huygens Beobachtung für

die

die Länge des Secundenpenduls 36 Zoll 8 Lin. 5 Scrupel, oder 36 Zoll $8\frac{1}{2}$ Linien.

181 §.

Die Beschleunigung der Schwere; oder die Tiefe des freyen Falles schwerer Körper für die erste Secunde des Falles zu finden (30 §).

Aufl. Für die Zeit t des kleinsten Schwunges, für ein Pendul, das die natürliche Schwere beschleunigt, und dessen Länge $= a$ ist, ward im 133 und 134 §. die Gleichung gefunden $t = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$.

Ist also l die Länge des Secunden-Penduls: so wird $t = 1$ Sec. wenn man $a = l$ setzt. Dies giebt $\sqrt{2g} = \pi\sqrt{l}$, und $g = \frac{1}{2}\pi^2 l$.

Nun war $l = 440{,}5$ Par. Lin. (180 §), oder nach der Bestimmung des Herrn Mairan 440,5; Lin. (*Maupertuis* Figure de la Terre, pag. 180.) oder $l = 3{,}059$ Par. Fuß; also $\frac{1}{2}l = 220{,}285$ Par. Lin., und es ist

$$\log \pi = 0{,}4971498 \text{ (468 § G.)}$$
$$\log \pi^2 = 0{,}9942996$$
$$\log \tfrac{1}{2} l = 2{,}3429159$$
$$\log \tfrac{1}{2}\pi^2 l = 3{,}3372157$$

also $g = 2173{,}7805$ Lin.

oder $g = 15{,}0957$ Par. Fuß.

Huygens (Horat. oscill. P. IV. Pr. 25.) setzt das Verhältniß des Pariser Fusses zum Rheinländischen $= 144 : 139$; es ist aber nach richtigern Bestimmungen $= 1440 : 1391\frac{3}{4}$ (198 § R.). Dies giebt 15,6241 Rheinl. Fuß für die Höhe des freyen

Falles in der ersten Secunde. Statt dieser Zahl ist im 30 § aus Herrn Eulers Mechanica Tom. I. §. 220. die Zahl 15,625 Rheinl. Fuß angenommen, die von der gefundenen um keinen völligen Scrupel abweicht. Die Länge des Secunden-Pendels ist also 3,166 Rheinl. Fuß.

Wenn nun der Pariser Fuß sich zum Londonschen, wie 14400:13502 verhält (198 § R.): so wird $g = \frac{14400}{13502} \times 15{,}0957 = 16{,}0996$ Londner Fuß, oder fast 16,1 Fuß, und die Länge des Secunden-Pendels = 3,2624 Fuß.

182 §.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß Huygens Vorschlag, die Länge des Secunden-Pendels zur Bestimmung des allgemeinen Fußmaasses, zu gebrauchen, schon deswegen nicht in Ausübung gebracht werden könne, weil die Länge desselben nicht an allen Orten gleich befunden ist; dessen zugeschweigen, daß zur Bestimmung dieser Länge zu viel Vorsicht erfordert wird, die nicht von einem jeden erwartet werden kan, der mit Messungen umgehen muß. Richer hat zuerst im Jahr 1672 auf der Insul Cayenne bemerkt, daß ein Pendul, welches zu Paris Secunden schlug, auf der Insul langsamer gieng. Er muste es um $1\frac{1}{4}$ Linie verkürzen, damit es dort Secunden schlug. Man hat nach der Zeit Beobachtungen von der Art angestellt. Bouguer fand unter dem Aequator die Länge des Secunden-Pendels 36 Z. 7,21 Lin. Par. Maaß; (Figure de la terre, Sect. VII. pag. 343.) und Maupertuis zu Pello in Lappland 441,17 Lin. oder 36 Zoll 9,17 Lin. in eben dem Maasse. (*Maupertuis* Figure de la Terre,

p. 180.) Es folgt hieraus, daß die Schwere die Körper nicht an allen Orten auf der Erde gleich stark beschleunige (136 §). Dieser Unterscheid hat verschiedene Ursachen, wovon die mathematische Geographie mehrern Unterricht geben wird.

Der XII. Abschnitt.

Von der relativen oder scheinbaren Bewegung.

183 §.

Die wahre Bewegung eines Puncts ist bekannt, wenn man im Stande ist, den Ort anzugeben, wohin der Körper nach einer gegebenen Zeit gelangt ist. Aber der Ort eines Körpers läst sich nicht anders angeben, als durch die Bestimmung seiner Lage gegen gewisse bekannte Gränzen des Raums, worin sich der Körper bewegt (9 §). Dafern der Punct B in der graden Linie CN fortgeht: so läst sich sein Ort jedesmal durch seine Entfernung AB von einem bekannten Punct A in dieser Linie angeben, wobey zugleich die gewöhnlichen Zeichen (+) und (−) gebraucht werden, anzudeuten, auf welcher Seite in Absicht des Puncts A der Punct B sich jetzt befinde. 167 Fig.

Bewegt sich ferner B in einer gegebenen Ebene: so läst sich der Ort dieses Puncts B jedesmal durch seine Lage gegen einen bekannten Punct A in dieser Ebene bestimmen, wenn durch denselben zwo grade Linien *rs*, *tv*, in dieser Ebene in bekannter Lage gezogen sind, die sich unter einem bekannten Winkel 168 Fig.

sAv schneiden. Wenn BD mit *rs*, und BE mit *tv* parallel gezogen worden, und man kennet die Grösse sowohl von AD, als auch von AE, und ihre Lage gegen den Punct A; so ist der Ort des Puncts B gegen A bestimmt.

184 §.

Es ist hiebey völlig einerley, ob der Punct A ruhet, oder selbst in Bewegung ist. Wenn man nur im letzten Fall allemahl den Ort des Puncts A als bekannt ansehen kann; so wird der Ort des Puncts B gegen A sich eben so bestimmen lassen. Man se-
167 Fig. tze, daß sich zweene Puncte A und B in einer und eben derselben graden Linie CN bewegen, und in der Zeit *t* sey A durch AM, und B durch BN fortgegangen. Soll man nun jedesmahl den Ort des Puncts B gegen A bestimmen: so darf man nur wissen, um wie viel der Punct B während der Zeit *t* entweder von A weiter fortgerückt sey, oder sich gegen A genähert habe. Weiß man am Ende der Zeit *t*, wie groß MN sey; und ob MN in Absicht auf M vorwärts, oder rückwärts liege: so weiß man für diesen Augenblick den relativen, oder scheinbaren Ort des Puncts B gegen A. Die Aenderung dieses relativen Orts des Puncts B in Absicht des Puncts A, heist die scheinbare, oder relative Bewegung des Puncts B gegen A, und wenn man MQ = AB macht: so ist QN der relative, oder scheinbare Weg, den der Punct B in der Zeit *t* mit seiner scheinbaren Bewegung zurückgelegt hat. Wäre nemlich A ein Beobachter, der seine eigene Bewegung nicht merkte: so würde es demselben so vorkommen, als wenn B in der Zeit *t* nur um das Stück QN weiter fortgerückt wäre, da doch B in dieser Zeit

würk-

würklich den Weg BN zurückgelegt hat. Will man nun blos die relative Bewegung des Puncts B kennen: so braucht man den Umstand gar nicht in Betrachtung zu ziehen, daß A während der Zeit *t* ebenfalls fortgerückt ist. Man kann die Sache so betrachten, als wenn A in Ruhe geblieben, und B in der Zeit *t*, um das Stück BP = QN fortgerückt wäre. Es hat nun P gegen A eben die Lage, die N gegen M hat, und es ist P für diesen Augenblick der scheinbare, oder relative Ort des Puncts B.

185 §.

Wenn sich beyde Puncte A und B nicht in einer, und eben derselben graden Linie, aber doch in einer Ebene bewegen; so kan man durch völlig ähnliche Schlüsse die scheinbare Bewegung des einen gegen den andern bestimmen. Es sey A in der Zeit *t* durch 168
den Weg AM, und B in eben der Zeit durch den Weg Fig.
BN fortgegangen, da es dann gleich viel ist, ob diese Wege grade, oder krumme Linien sind. Dafern man nun für jede Zeit *t* den wahren Ort des Puncts A sowohl, als des Puncts B, gegen einen bekannten Punct C angeben kann, worin sich die beyden Linien CV, CS, unter dem bekannten Winkel SCV schneiden: so ziehe man MH mit CV, und NH mit CS parallel, und es werden sich diese Linien irgendwo in H schneiden. Dafern man nun MH und NH der Grösse und Lage nach kennet: so wird der Ort des Puncts N gegen M, das ist, der scheinbare Ort des Puncts B gegen A für diesen Augenblick bestimmt seyn. Man ziehe durch A mit CV und CS, die Parallelen A*v*, A*s*, mache A*p* = MH, ziehe *pn* mit A*s* parallel, und nehme *pn* = HN: so hat *n* gegen A

eben die Lage, welche N gegen M hat. Da nun hiebey die Bewegung des Puncts A selbst nicht in Betrachtung kommt: so kan man die Sache so betrachten, als ob A überall in Ruhe bliebe, und es wird n für diesen Augenblick der scheinbare Ort des Puncts B seyn. Kan man nun für jede Zeit t auf eben die Art, sowohl Ap, als auch pn bestimmen: so liegen alle Puncte n in einer gewissen Linie Bn, und diese ist die scheinbare Bahn des Puncts B in Ansehung des Puncts A.

Wenn nicht beyde Puncte A und B beständig in einerley Ebene bleiben: so läst sich auf ähnliche Art über die scheinbare Bewegung des einen, gegen den andern urtheilen. Es wird dieser Fall unten besonders vorkommen.

186 §.

167 Fig. Wenn zweene Puncte A und B sich in einer und eben derselben graden Linie CN mit gegebenen Geschwindigkeiten gleichförmig bewegen: so ist die scheinbare Bewegung des Puncts B gegen A ebenfalls gleichförmig.

Beweis. Es sey A mit der Geschwindigkeit a aus A nach M; B mit der Geschwindigkeit b aus B nach N in der Zeit t gekommen; überdem sey $CM = s$, $CN = S$: so hat $MN = S - s$. Nun ist $dS = bdt$, und $ds = adt$ (113 §); oder $S = CB + bt$, und $s = CA + at$, weil im Anfange der Bewegung $S = CB$, $s = CA$, und $t = 0$ war. Dies giebt $S - s = MN = CB - CA + (b-a)t$; oder $MN = AB + (b-a)t$. Man nehme also $AP = AB + (b-a)t$, oder $BP = (b-a)t$: so ist P der scheinbare Ort des Puncts B, am Ende der Zeit t, und $BP = (b-a)t$ ist der scheinbare Weg, welchen B in der Zeit t zurück-

rückgelegt hat. Da nun dieser der Zeit t proportional ist: so ist die scheinbare Bewegung gleichförmig.

187 §.

Wenn man t in Zeitsecunden ausdrückt: so giebt $\frac{BP}{t} = b - a = \frac{d.AP}{dt}$ den scheinbaren Weg, welchen B in einer Secunde zurücklegt. Dieser kan also die scheinbare, oder relative Geschwindigkeit des Körpers B in eben dem Verstande heissen, in welchem man das Wort Geschwindigkeit sonst bey der wahren gleichförmigen Bewegung gebraucht.

Es wird demnach die scheinbare Geschwindigkeit des Puncts B gefunden, wenn man von seiner wahren Geschwindigkeit die wahre Geschwindigkeit des andern Puncts A subtrahirt, desjenigen Puncts nemlich, worauf sich die relative Bewegung des vorigen beziehen soll.

Wäre beyden Puncten A und B zugleich im Anfange der Zeit t eine Geschwindigkeit mitgetheilt worden, die der Geschwindigkeit des Puncts A gleich und entgegengesetzt ist: so wäre A in Ruhe geblieben, und B mit der Geschwindigkeit $b - a$ fortgegangen, und die wahre Bewegung des Puncts B mit der Geschwindigkeit $b - a$ würde nun mit seiner vorhin betrachteten scheinbaren Bewegung völlig übereinkommen.

Wäre nemlich $AP = x$: so hätte man nach dem 113 § $dx = (b-a)dt$, also $x = (b-a)t + C$. Aber für $t = 0$, ist $x = AB$, also wird $C = AB$, und $x = AB + (b-a)t$, wie vorhin.

188 §.

188 §.

169 Fig. **Wenn zweene Puncte *A* und *B* in einer und eben derselben Ebene sich in verschiedenen graden Linien *AM* und *BN* mit den Geschwindigkeiten *a* und *b* gleichförmig bewegen: so ist die scheinbare Bewegung des Puncts *B* gegen *A* ebenfalls gradlinicht und gleichförmig.**

Beweis. Es sey A nach M und B nach N in der Zeit *t* gegangen. Ferner sey die wahre Bewegung der Puncte A und B gegen den Punct C bekannt, worin sich CS und CV, unter dem bekannten Winkel VCS schneiden. Der kürzern Rechnung wegen sey VCS = 90°, da durch diese Voraussetzung der Allgemeinheit des Beweises nichts abgehet. Es schneide AM die Axe CV unter dem Winkel α und und BN unter dem Winkel β: so gehen A und B nach den Richtungen CV mit den Geschwindigkeiten $a\cos\alpha$ und $b\cos\beta$; nach CS aber mit den Geschwindigkeiten $a\sin\alpha$ und $b\sin\beta$ fort. Man ziehe AD, MP, BE, NQ mit CS parallel, setze CP = *x*, PM = *y*, CQ = *r*, QN = *s*, und schliesse, wie im 186 §: so wird $dx = adt\cos\alpha$, $dy = adt\sin\alpha$, $dr = bdt\cos\beta$, $ds = bdt\cos\beta$, und

$$x = at\cos\alpha + \mathrm{CD},\quad y = at\sin\alpha + \mathrm{AD}$$
$$r = bt\cos\beta + \mathrm{CE},\quad s = bt\sin\beta + \mathrm{BE},$$

weil im Anfang der Bewegung $x = \mathrm{CD}$, $y = \mathrm{AD}$, $r = \mathrm{CE}$, $s = \mathrm{BE}$, $t = 0$ seyn muß. Durch M sey MH mit CV parallel gezogen, welche NQ in H schneidet; durch A aber sey *Av* mit CV parallel, und schneide BE in F: so wird

$$\mathrm{MH} = r - x = (b\cos\beta - a\cos\alpha)\,t + \mathrm{AF}$$
$$\mathrm{HN} = s - y = (b\sin\beta - a\sin\alpha)\,t + \mathrm{BF}$$

Man nehme also $Ap = \mathrm{MH} = (b\cos\beta - a\cos\alpha)\,t + \mathrm{AF}$;

$+$ AF; oder $Fp = (b\cos\beta - a\cos\alpha)t$; setze pn auf Ap senkrecht, und mache $pn = HN = (b\sin\beta - a\sin\alpha)t + BF$: so ist n der scheinbare Ort des Puncts B am Ende der Zeit t.

Weil nun $t = \frac{Ap - AF}{b\cos\beta - a\cos\alpha} = \frac{BF - pn}{b\sin\beta - a\sin\alpha}$; so erhält man eine Gleichung zwischen Ap und pn für den scheinbaren Weg des Körpers, die zur ersten Ordnung gehört (85 §). Also ist dieser scheinbare Weg eine grade Linie (89 §); diese Linie geht durch B und n; denn für $Ap = AF$, wird $pn = FB$, wie die Gleichung zeigt. Ist also ausser B nur ein Punct n gefunden: so kann man diese Linie leicht verzeichnen.

Man ziehe BG mit CV parallel, und diese Linie schneide pn in G. Der Kürze wegen setze man $b\cos\beta - a\cos\alpha = A$, und $b\sin\beta - a\sin\alpha = B$: so ist $BG = Ap - AF = Fp = (b\cos\beta - a\cos\alpha)t = A.t$ und $Gn = pn - BF = (b\sin\beta - a\sin\alpha)t = B.t$, folglich $Bn = t\sqrt{(A^2 + B^2)}$. Dies ist der Weg, welchen der Punct B in seiner scheinbaren Bahn in der Zeit t zurücklegt; und weil derselbe der Zeit proportional ist: so ist die scheinbare Bewegung gleichförmig.

189 §.

Wenn der Winkel nBG bekannt ist: so ist die Lage der scheinbaren Bahn; oder die scheinbare Richtung der Bewegung des Puncts B gegen A bekannt.

Es wird aber $\text{tang}\, nBG = \frac{Gn}{BG} = \frac{B}{A}$; also $\sin nBG = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ und $\cos nBG = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Die scheinbare Geschwindigkeit ist $= \frac{Bn}{t} = \sqrt{(A^2 + B^2)}$.

Wäre im Anfang der Zeit t beyden Puncten zugleich eine Geschwindigkeit mitgetheilt worden, die der Geschwindigkeit a des Puncts A gleich und entgegengesetzt wäre: so würde A in Ruhe geblieben seyn; der Punct B aber wäre nach den Richtungen CV und CS mit den Geschwindigkeiten $b\cos\beta -$ $a\cos\alpha = A$, und $b\sin\alpha - a\sin\alpha = B$, fortgegangen, folglich mit der wahren Geschwindigkeit $= \sqrt{(A^2+B^2)}$ nach einer Richtung Bn, welche CV unter einem Winkel schnitte, dessen Tangente $= \frac{B}{A}$ wäre.

Demnach würde diese wahre Bewegung mit der vorhin betrachteten scheinbaren Bewegung des Puncts B völlig übereinkommen.

190 §.

167 Fig. Wenn zweene Puncte A und B in einer graden Linie CN fortgehen, und von Kräften, deren Richtungen in dieser graden Linie liegen, beschleuniget werden: so kommt die scheinbare Bewegung des Puncts B gegen A überein mit der wahren Bewegung, womit B fortgehen würde, wenn beyden Körpern zugleich im Anfang der Bewegung eine Geschwindigkeit mitgetheilt würde, die der Geschwindigkeit des Puncts A gleich und entgegengesetzt wäre, und von diesem Augenblick an auf beyde Körper nach entgegengesetzter Richtung Kräfte würkten, deren Beschleunigung für jeden Augenblick der Beschleunigung derjenigen Kraft gleich wäre, welche den Punct A treibt.

Beweis.

Beweis. Eine Kraft $= p$ treibe A und eine Kraft P den Punct B; beyde nach der Richtung CN. Im Anfang der Zeit t sollen a und b die Geschwindigkeiten der Puncte A und B seyn: am Ende der Zeit t aber, worin beyde Puncte die Wege AM und BN zurück gelegt haben, sind v und u die Geschwindigkeiten dieser Puncte. Man setze $CA = f$, $CB = h$, $CM = x$, $CN = y$: so hat man für die wahre Bewegung dieser Puncte die Gleichungen

$$dv = \frac{2gpdt}{A}, \quad du = \frac{2gPdt}{B},$$

wenn A und B die Massen dieser Puncte sind. Also wird $v = \frac{dx}{dt}$ (113 §.) $= \int \frac{2gpdt}{A} + a$;

$$u = \frac{dy}{dt} = \int \frac{2gPdt}{B} + b,$$ wenn man die Integrale $\int pdt$, und $\int Pdt$ so nimmt, daß sie für $t = 0$ verschwinden. Die fernere Integration giebt

$$x = \int dt \int \frac{2gpdt}{A} + at + f.$$

$$y = \int dt \int \frac{2gPdt}{B} + bt + h.$$

wenn die Integrale wiederum für $t = 0$ verschwinden.

Man nehme nun $AP = MN = y - x = z$, so ist P der scheinbare Ort des Puncts B am Ende der Zeit t. Also

$$z = \int dt \int \frac{2gPdt}{B} - \int dt \int \frac{2gpdt}{A} + (b-a)t + h - f$$

$$\text{folglich } \frac{dz}{dt} = \int \frac{2gPdt}{B} - \int \frac{2gpdt}{A} + (b-a)$$

$$\text{d. i. } \frac{dz}{dt} = u - v.$$

Man

Man siehet leicht, daß dies die scheinbare Geschwindigkeit des Puncts B für diesen Augenblick seyn werde. Denn wenn von diesem Augenblick an die Bewegung gleichförmig bliebe: so würde B von A in einer Secunde um den Weg $u - v = \frac{dz}{dt}$ fortrücken.

Es sey also $\frac{dz}{dt} = w$: so wird

$$w = 2g\int\left(\frac{P}{B}dt - \frac{p}{A}dt\right) + b - a$$

also $dw = 2g\left(\frac{P}{B} - \frac{p}{A}\right)dt$.

Wäre aber im Anfang der Bewegung beyden Puncten die Geschwindigkeit $-a$ mitgetheilt, und an A die Kraft $-p$; an B aber eine Kraft $= -\frac{B.p}{A}$, angebracht, so, daß die Verzögerung beyder Kräfte $= -\frac{p}{A}$ wäre; so würde A ruhen, und die wahre Bewegung des Puncts B durch die Gleichungen

$$dw = 2g\left(\frac{P}{B} - \frac{p}{A}\right)dt$$

$$w = 2g\int\left(\frac{P}{B} - \frac{p}{A}\right)dt + b - a = \frac{dz}{dt}$$

und $z = 2g\int dt\int\left(\frac{P}{B} - \frac{p}{A}\right)dt + (b-a)t + h - f$

bestimmt werden, welche mit den vorigen völlig übereinkommen. 191 §.

191 §.

Der Satz des vor. §. läst sich noch viel allgemeiner machen. Wenn beyde Puncte A und B nicht in einer, und eben derselben graden Linie, ja auch nicht in einer Ebene sich bewegen, und an beyden Puncten so viele bewegende Kräfte, als man will, angebracht sind: so läst sich die relative Bewegung des Puncts B gegen A auf eine ähnliche Art bestimmen.

Man nehme an, es sey gleich im Anfange der Bewegung beyden Körpern zugleich eine Geschwindigkeit mitgetheilt, die derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, womit A in diesem Augenblick fortgehet. Man nehme ferner an, daß alle an A angebrachte Kräfte durch gleiche und entgegengesetzte aufgehoben werden; an B aber, ausser den Kräften, die diesen Punct beschleunigen, alle Kräfte, die den Punct A forttreiben, nach entgegengesetzten Richtungen angebracht, und in dem Verhältnisse der Massen A:B verändert worden, so daß jede die Masse B so stark verzögere, als sie A beschleunigen würde. Auf solche Art würde *A* in Ruhe bleiben, und die relative Bewegung des Puncts *B* gegen *A* wird mit der wahren Bewegung, die jene Voraussetzungen geben, übereinkommen.

Beweis. Wenn die Bahnen AM und BN beyder Körper M und N in einer Ebene liegen: so setze man, daß CV und CS zwo auf einander senkrechte Linien in eben dieser Ebene sind, und man ziehe AD, BE, MP, NQ auf CV senkrecht, setze CD = *f*, AD = *e*, CE = *h*, BE = *k*. Ferner sey MH mit CV parallel, und schneide NQ in H: so bestimmen MH und HN die Lage des Puncts N gegen M. 169 Fig.

Man ziehe auch Ap mit CV parallel; setze pn auf Ap senkrecht, und mache $pn = $ HN: so hat nun n gegen A eben die Lage, die N gegen M hat, und weil die Bewegung des Puncts A nicht in Betrachtung kommt: so wird n der scheinbare Ort des Puncts B gegen A für diesen Augenblick seyn. Nun zerlege man alle Kräfte, welche die Puncte A und B treiben, nach den Richtungen CE und CS, und bringe diejenigen, die nach einerley Richtung ziehen, für jeden Punct in eine Summe. Auf A also würke p nach CV, und q nach CS, auf B aber P nach CV, und Q nach CS. Man setze CP $= r$, PM $= s$, CQ $= x$, QN $= y$. Die anfänglichen Geschwindigkeiten der Puncte A und B sollen a, b, nach CV; und α, β, nach CS seyn: ihre Geschwindigkeiten in M und N aber v und w nach CV, v' und w' nach CS. Man schliesse nun für jede dieser Richtungen wie im 190 §: so wird

$$r = \int dt \int \frac{2gp\,dt}{A} + at + f$$

$$x = \int dt \int \frac{2gP\,dt}{B} + bt + h.$$

Man nehme PQ $=$ MH $=$ Ap $= x - r =$ X: so erhält man

$$X = \int dt \int \frac{2gP\,dt}{B} - \int dt \int \frac{2gp\,dt}{A} + (b-a)t + h - f.$$

$$\text{also } \frac{dX}{dt} = \int \frac{2gP\,dt}{B} - \int \frac{2gp\,dt}{A} + b - a.$$

Dies wird die scheinbare Geschwindigkeit nach der Richtung CV; und wenn man sie $= w$ setzt: so wird

$$dw = 2g\left(\frac{P}{B} - \frac{p}{A}\right)dt.$$

Setzt

Setzt man nun $HN = pn = y - s = Y$: so erhält man eben so

$$Y = \int dt \int \frac{2gQdt}{B} - \int dt \int \frac{2gqdt}{A} + (\beta - \alpha)t + k - e,$$

also $\frac{dY}{dt} = \int \frac{2gQdt}{B} - \int \frac{2gqdt}{A} + \beta - \alpha$ für die relative Geschwindigkeit nach der Richtung CS, und wenn diese $= W$ gesetzt wird: so erhält man

$$dW = 2g\left(\frac{Q}{B} - \frac{q}{A}\right)dt.$$

Diese beyden Gleichungen ergeben, daß die Aenderungen der relativen Geschwindigkeiten nach den Richtungen CV und CS eben so erfolgen, als wenn an B die Kräfte $-\frac{B}{A}p$, und $-\frac{B}{A}q$, angebracht, und die anfänglichen Geschwindigkeiten b und β, um a und α vermindert wären.

Daß eben die Auflösung noch ihre Richtigkeit habe, wenn gleich die Bahnen AM und BN beyder Körper nicht in einer Ebene liegen, erhellet so. Man setze, daß durch einen bekanten Punct C des Raums, worin die Körper sich bewegen, drey auf einander senkrechte Ebenen VCR, VCS, SCR, gelegt sind, und man setze MQ, NG auf der Ebene RCV; QP, GF aber auf CV senkrecht: so bestimmen CP, PQ, QM des Puncts A; CF, FG, GN aber des Puncts B wahren Ort am Ende der Zeit t. Durch M sey eine Ebene MHZ mit RCV parallel gelegt, und in derselben MX mit CV parallel; NG aber schneide diese Ebene in Y, und es sey YX auf CX senkrecht: so bestimmen MX, XY, YN, den relativen Ort des 170 Fig

Puncts N gegen M. Man ziehe also AP = und ∥MX, pq = und ∥XY, qn = und ∥YN: so hat n gegen A eben die Lage, die N gegen M hat.

Nun muß man alle Kräfte, welche die Puncte A und B treiben, nach den Richtungen CV, CR, CS zerlegen: Ist alsdenn die Summe aller Kräfte, die A nach CV treiben, = p, und derer, die B nach eben der Richtung treiben, = P: so wird, wie vorhin, MX = Ap = CF − CP =

$$\int dt \int \frac{2gP\,dt}{B} - \int dt \int \frac{2gp\,dt}{A} + (b-a)\,t + h - f$$

gefunden, wenn b, a, die anfänglichen Geschwindigkeiten nach dieser Richtung sind, und CK = h, CD = f ist. Und wenn w die relative Geschwindigkeit nach eben der Richtung ist: so wird, wie vorhin,

$$dw = 2g\left(\frac{P}{B} - \frac{p}{A}\right)dt.$$

Für die relativen Geschwindigkeiten nach den Richtungen CR und CS werden eben solche Ausdrücke gefunden, wie man ohne Weitläuftigkeit übersiehet, und dadurch wird die Richtigkeit der festgesetzten Regel allgemein bestätigt.

Es kann vermittelst dieser Regel für jede gegebene Zeit t die scheinbare Geschwindigkeit und Richtung nebst der Gleichung gefunden werden, welche die Natur der scheinbaren Bahn ausdrückt, auch die Grösse des Weges, die der Punct B in seiner scheinbaren Bahn in gegebener Zeit zurücklegt. Alles dies wird in der Folge, bey weiterer Anwendung der Integralrechnung auf die Mechanik sich vollständiger zeigen lassen. Die scheinbare Bahn läst sich übrigens auch durch eine geometrische Verzeichnung finden, wie folgende Aufgabe zeigen wird.

192 §.

Die wahren Bahnen der Puncte *A* und *B* sind gegeben, und man weis jedesmahl den Punct *N*, wo sich *B* in seiner Bahn befindet, wenn *A* in seiner Bahn in *M* anlangt: man soll die scheinbare Bahn des Puncts *B* durch Zeichnung finden. 169 170 Fig.

Aufl. Im Anfang der Bewegung sey A in A, und B in B; nach einer gewissen Zeit aber A in M, und B in N. Man ziehe MN, und hierauf durch A mit MN eine Parallellinie. Auf dieser nehme man $An = MN$: so ist *n* für diesen Augenblick der scheinbare Ort des Puncts B. Man kann auf solche Art so viele Puncte *n*, als man will, suchen, und dann die scheinbare Bahn des Körpers B durch diese Puncte durchführen.

Beweis. Wenn A und B sich in einer Ebene bewegen: so sey die 169 F. so wie im vor. §. gezeichnet. In derselben ist $Ap = MH$, $pn = HN$, $Ap = 90° = MHN$, also $An = MN$. Ferner ist der Winkel $nAp = NMH$, also auch $nAm = NMm$, folglich An mit MN parallel (81 §. G.) Wenn sich A und B aber nicht in einer Ebene bewegen: so sey die 170 F. wie im vor. §. gezeichnet, und man siehet leicht, daß $Aq = MY$, auch, daß beyde diese Linien parallel seyn, weil es Ap und MX sind. Also wird auch $Am = qY = Nn$, und zugleich werden diese Linien parallel, so wie auch die Ebenen der Dreyecke Aqn, MYN, parallel sind (330 §. G.), folglich ist AMN*n* ein Parallelogramm (331 §. G.) 169 Fig.

Diese Verzeichnung behält also auch ihre Richtigkeit, wenn B ruhet, A aber eigentlich in Bewegung ist, und man die relative Bewegung des Puncts B gegen A sucht.

193 §.

193 §.

171 Fig. Um ein paar leichte Fälle zu haben, worauf sich die Regeln des vor. §. ohne Schwürigkeit anwenden lassen, setze man, es gehe A in einem Kreise herum, in dessen Mittelpunct B ruhet. Man ziehe AB und nehme so viel Puncte, C, D, E, u.s.f. in der Bahn des Körpers A, als man will, ziehe Ac = und # CB, Ad = und # DB, Ae = und # EB u.s.f. so erhellet, daß AB, Ac, Ad, Ae, alle gleich groß werden, daß folglich die scheinbare Bahn des Puncts B ein Kreis um den Mittelpunct A sey von eben dem Halbmesser, wie die wahre Bahn des Puncts A.

172 Fig. Dafern zwar A noch in einem Kreise um den Mittelpunct G herum gehet, aber B ausser der Ebene dieses Kreises ruhig liegt: so ziehe man ebenfalls AB, und mache ferner Ac, Ad, Ae u.s.f. den Linien CB, DB, EB, u.s.f. gleich und parallel: so erhellet zuerst, daß die Puncte B, *c*, *d*, *e*, u.s.f. alle von der Ebene des Kreises um G gleich weit abstehen, folglich in einer Ebene liegen. Wenn nun AE ein Durchmesser des Kreises um G ist: so wird Be = AE. Man halbire Be bey *g*, und ziehe *gc*: so ist der Winkel *g*B*c* = GAC (85 §. G.) B*c* = AC, B*g* = AG, folglich *gc* = GC = *g*B. Auf ähnliche Art erhellet, es sey auch *gc* = *gd* = *ge* u.s.f. Also ist die scheinbare Bahn wiederum ein Kreis; sein Halbmesser ist so groß, als der Halbmesser der wahren Bahn des Puncts A, und eine grade Linie durch A mit GB parallel gezogen, trift die Ebene der scheinbaren Bahn in ihrem Mittelpunct.

194 §.

Aus den im 188 §. bewiesenen Regeln fliessen noch folgende zweene Sätze:

1)

1) Wenn zweene oder mehr Körper in Bewegung sind, und allen zugleich werden gleiche Geschwindigkeiten nach parallelen Richtungen mitgetheilt: so wird ihre scheinbare Bewegung hiedurch nicht geändert. Ist nemlich A einer von diesen Körpern: so sey die wahre Geschwindigkeit, womit er in diesem Augenblick fortgehet, den dreyen Seitengeschwindigkeiten a, b, c, nach dreyen untereinander rechtwinklichten Richtungen äquipollent. Theilt man ihm nun nebst allen übrigen Körpern nach einerley Richtung eine Geschwindigkeit mit, die nach eben den senkrechten Richtungen zerlegt, die Geschwindigkeiten α, β, γ, giebt: so sind nun seine Geschwindigkeiten nach diesen Richtungen $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$, und die Geschwindigkeiten aller übrigen Körper haben nach eben diesen Richtungen eben die Zusätze bekommen. Nun ist aber die scheinbare Bewegung der übrigen Körper gegen A in der folgenden Zeit t so beschaffen, wie die wahre Bewegung gegen den ruhenden Punct A seyn würde, wenn man allen im Anfang der Zeit t die Geschwindigkeit mittheilte, welche derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, womit A in diesem Augenblick fortgehet; und überdem an allen diesen Körpern ihren Massen proportionale Kräfte angebracht wären, deren Beschleunigungen eben so groß, als die Beschleunigung der an A angebrachten Kraft, ihr aber entgegengesetzt sind. Hiedurch werden die Geschwindigkeiten α, β, γ, wieder aufgehoben, und es ist in Absicht auf die scheinbare Bewegung eben so viel, als wenn sie nicht da wären.

2) Wenn also auch an allen diesen Körpern zugleich bewegende Kräfte nach paral-

lelen

lelen Richtungen angebracht werden, die ihren Massen proportional sind: so ändert auch dies ihre relative Bewegung gegen einander nicht. Wenn nemlich die Beschleunigungen der Kräfte, die auf den Körper A würken, nach dreyen auf einander senkrechten Richtungen zerlegt, die Kräfte P, Q, R geben, und die Beschleunigungen der neu angebrachten Kräfte zerlegen sich in p, q, r; so sind nun die Beschleunigungen der an A nach diesen Richtungen angebrachten Kräfte $P+p$, $Q+q$, $R+r$, und die Beschleunigungen der an allen übrigen angebrachten Kräfte haben eben die Zusätze p, q, r, nach eben den Richtungen erhalten. Wenn man nun, wie erfordert wird, um die scheinbare Bewegung zu bestimmen, voraussetzt, daß an allen Körpern nach entgegengesetzten Richtungen, Kräfte angebracht werden, deren Beschleunigungen $P+p$, $Q+q$, $R+r$ sind: so werden p, q, r aufgehoben, und es ist in Absicht der scheinbaren Bewegung eben so viel, als wenn sie gar nicht da wären.

Der XIII. Abschnitt.

Von der Bewegung des Schwerpuncts eines Systems mehrer Körper.

195 §.

173 Fig. Wenn so viel körperliche Puncte, $A, B, C, D,$ als man will, in graden Linien nach parallelen Richtungen mit den Geschwindigkeiten $a, b, c, d,$ u. s. f. gleichförmig fortgehen: so bewegt

bewegt sich auch ihr Schwerpunct G nach eben der Richtung gleichförmig.

Und wenn man sich im Schwerpunct alle Massen vereinigt vorstellt: so ist die Bewegung des Schwerpuncts der Summe der Bewegungen aller einzelnen Massen gleich.

Beweis. Man schneide die Richtungen der einzelnen Massen senkrecht mit der graden Linie $Z\delta$, in α, β, γ, δ, und durch G sey GH mit den Richtungen dieser Massen parallel: so ist

$$ZH = \frac{A.Z\alpha + B.Z\beta + C.Z\gamma + D.Z\delta}{A+B+C+D}.$$

Dieser Ausdruck ändert sich nicht, die Puncte A, B, C, D mögen in den graden Linien $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ stehen, wo sie wollen. Also ist der Weg Gg des Schwerpuncts eine grade Linie, und mit den Wegen der einzelnen Puncte parallel. Wenn nun die Puncte A, B, C, D in der Zeit t, die Wege Aa, Bb, Cc, Dd, durchlaufen, und der Schwerpunct G den Weg Gg: so wird $A = a.t$, $Bb = b.t$, $Cc = c.t$, $Dd = d.t$. Es ist aber

$$gH = \frac{A.a\alpha + B.b\beta + C.c\gamma + D.d\delta}{A+B+C+D}, \text{ und}$$

$$GH = \frac{A.A\alpha + B.B\beta + C.C\gamma + D.D\delta}{A+B+C+D}, \text{ also}$$

$$Gg = gH - GH = \frac{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}{A+B+C+D}$$

$$\text{oder } Gg = \frac{(A.a + B.b + C.c + D.d)\,t}{A+B+C+D}.$$

Demnach ist der Weg des Schwerpuncts der Zeit pro-

proportional; also die Bewegung gleichförmig, und $\frac{Gg}{t}$ seine Geschwindigkeit. Setzt man diese $= k$, so wird $(A+B+C+D)k = A.a+B.b+C.c+D.d$, wo $(A+B+C+D)k$ die Grösse der Bewegung des Schwerpuncts ist, wenn man sich alle Massen in demselben vereiniget vorstellt.

Wenn einige der Puncte A, B, C, D, u. s. f. nach entgegen gesetzter Richtung gegen ZH zu gehen; so ist die Grösse ihrer Bewegung in Absicht der übrigen negativ. Und wenn in eben diesem Fall die Summe aller Bewegungen (2 §. A. R.) $= 0$ ist, so bleibt der Schwerpunct in Ruhe.

196 §.

174 Fig. Die Puncte A, a, α, bewegen sich gleichförmig mit den Geschwindigkeiten $AC, ac, \alpha\gamma$, nach gegebenen Richtungen: man soll die Richtung und Geschwindigkeit ihres Schwerpuncts G suchen.

Aufl. Man zerlege die Geschwindigkeit AC in zwo andere AB, AD; eben so auch ac in ab, ad, und $\alpha\gamma$ in $\alpha\beta$ und $\alpha\delta$, mit den vorigen AB und AD parallel. Wenn nun A, a, α, allein mit den Geschwindigkeiten AB, ab, $\alpha\beta$, fortgiengen: so gienge G mit der Geschwindigkeit GN mit AB parallel fort, und es wäre $GN = \frac{A.AB+a.ab+\alpha.\alpha\beta}{A+a+\alpha}$ (195 §).

Wenn aber A, a, α, allein mit den Geschwindigkeiten AD, ad, $\alpha\delta$, fortgiengen: so gienge G mit der Geschwindigkeit GO mit AD parallel fort, so daß $GO = \frac{A.AD+a.ad+\alpha.\alpha\delta}{A+a+\alpha}$ wäre. Man verzeichne

zeichne also das Parallelogramm GNMO: so wird die Diagonale GM die Richtung und Geschwindigkeit des Schwerpuncts geben, weil dieser Punct mit beyden Geschwindigkeiten GN und GO zugleich fortgehet.

Die Bewegung des Schwerpuncts ist also auch in diesem Fall gleichförmig, und wenn die Summe aller Bewegungen der einzelnen Puncte, sowohl nach der einen, als nach der andern der angenommenen Richtungen $= o$ ist, so bleibt der Schwerpunct in Ruhe.

197 §.

Man kann hieraus noch diese besondere Folge ziehen. Wenn gleich AD, *ad*, $\alpha\delta$, und AB, *ab*, $\alpha\beta$ nicht parallel wären; es wäre aber GN der Weg, und die Geschwindigkeit des Schwerpuncts, wenn A, *a*, α allein die Geschwindigkeiten AB, *ab*, $\alpha\beta$, hätten; imgleichen GO der Weg, und die Geschwindigkeit des Schwerpuncts, wenn A, *a* und α allein die Geschwindigkeiten AD, *ad*, $\alpha\delta$ hätten: so würde ebenfalls GM der Weg und die Geschwindigkeit des Schwerpuncts seyn, indem A, *a*, α mit den Geschwindigkeiten AC, *ac*, $\alpha\gamma$ fortgehen.

198 §.

Dafern an den Puncten *A*, *B*, *C* die Kräfte *P*, *Q*, *R*, nach den Richtungen *AM*, *BN*, *CP*, angebracht sind: und diese Kräfte verhalten sich so gegen einander, daß alles im Gleichgewicht bleiben würde, wenn *A*, *B*, *C*, vermittelst grader unbiegsamer Linien *AB*, *BC*, oder sonst auf andre Art fest zusammen hiengen: so wird der Schwerpunct in Ruhe blei- 175 Fig.

bleiben, wenn gleich die einzelnen Massen sich frey fort bewegen.

Bew. Es sollen AM, BN, CP, die den Massen A, B, C, nach einer gewissen Zeit mitgetheilten Geschwindigkeiten ausdrücken. Man zerlege diese Geschwindigkeiten nach den Richtungen OE, OF, in Am, Bn, Cp, und $A\mu$, $B\nu$, $C\pi$: so ist die Geschwindigkeit des Schwerpuncts nach der Richtung

$$OE = \frac{B.Bn - C.Cp - A.Am}{A+B+C}, \text{ und nach}$$

$$OF = \frac{B.B\nu + C.C\pi - A.A\mu}{A+B+C}. \text{ Nun verhalten}$$

sich die an A, B, C nach AM, BN, CP angebrachten Kräfte, wie A.AM, B.BN, C.CP (57 §), und die Seitenkräfte, worin sie sich nach den Richtungen OE, OF, zerlegen, wie $A.Am$, $B.Bn$, $C.Cp$, und $A.A\mu$, $B.B\nu$, $C.C\pi$. Weil nun die Kräfte sich im Gleichgewichte halten würden; so ist $B.Bn - C.Cp - A.Am = 0$, und $B.B\nu + C.C\pi - A.A\mu = 0$, folglich ist die Geschwindigkeit des Schwerpuncts ebenfalls $= 0$.

199 §.

175 Fig. Wenn das Verhältniß der an *A*, *B*, *C*, wie im vor. §, angebrachten Kräfte nicht dasjenige ist, welches zum Gleichgewicht unter den eben daselbst gedachten Umständen erfordert würde; so geht der Schwerpunct nach einer Richtung fort, die mit der mittlern Richtung der Kräfte parallel ist.

Beweis. Es sey Dd die mittlere der an A, B, C, nach OE angebrachten Kräfte, und $D\delta$ die mittlere

lere der übrigen nach OF. Beyde mittlere Richtungen werden einander in D schneiden, und wenn man $Dd = B.B\nu - C.C\rho - A.Am$, $D\delta = B.B\gamma + C.C\pi - A.A\mu$ nimmt: so giebt die Diagonale DK des Parallelogramms $Dd K\delta$ die mittlere Richtung und Grösse der an A, B, C angebrachten Kräfte. Nun sey G der Schwerpunct der Massen A, B, C, und $Gg \parallel OE$, $G\gamma \parallel OF$. Man nehme

$$Gg = \frac{B.B\nu - C.C\rho - A.Am}{A+B+C}, \text{ und}$$

$$G\gamma = \frac{B.B\gamma + C.C\pi - A.A\mu}{A+B+C} \text{ (196 §);}$$

so ist die Diagonale GH des Parallelogramms $GgH\gamma$ die Richtung und Geschwindigkeit des Schwerpuncts für diesen Augenblick, wenn A, B, C sich frey bewegen können. Weil nun $Dd : D\delta = Gg : G\gamma$, oder $Dd : dk = Gg : gH$, und der Winkel $Ddk = GgH$, so ist das Dreyeck $DKd \sim GHg$, folglich der Winkel $KDd = HGg$, und GH mit DK parallel, weil Dd mit Gg parallel ist.

200 §.

Wenn die Puncte *A*, *B*, *C*, vermittelst unbiegsamer Linien *AB*, *BC*, oder sonst auf andere Art fest zusammen hängen, und an denselben die Kräfte *P*, *Q*, *R* angebracht sind; so geht der Schwerpunct nach eben der Richtung, und mit eben der Geschwindigkeit fort, wie er fortgehen würde, wenn jede einzelne Masse der ihr mitgetheilten Bewegung frey folgen könnte. 176 Fig.

Beweis. Dafern die Massen A, B, C in einem gewissen Augenblick mit den Geschwindigkeiten AA, BB, CC, frey fortgehen würden; wegen ihrer Verknüpfung unter einander aber nicht anders, als mit den Geschwindigkeiten A*a*, B*b*, C*c* fortgehen können: so ziehe man A*a*, B*b*, C*c*, und verzeichne die Parallelogramme A*a*A*α*, B*b*B*β*, C*c*C*γ*. Weil nun die Massen allein mit den Geschwindigkeiten A*a*, B*b*, C*c* fortgehen: so müssen die Bewegungen nach A*α*, B*β*, C*γ* einander aufheben: so daß, wenn diese allein die Massen A, B, C mitgetheilet wären, ihr Schwerpunct in Ruhe bliebe. Ist also GH die Richtung und Geschwindigkeit des Schwerpuncts, womit derselbe fortgehen würde, wenn A, B, C, allein mit den Geschwindigkeiten A*a*, B*b*, C*c* fortgiengen: so erhellet, daß eben dies im gegenwärtigen Fall auch die Richtung und Geschwindigkeit des Schwerpuncts seyn werde, da die mit einander festverknüpften Massen A, B, C, mit den Geschwindigkeiten AA, BB, CC fortzugehen streben. Könnten A, B, C, mit diesen Geschwindigkeiten frey fortgehen: so müste man, um die Geschwindigkeit des Schwerpuncts zu finden, erstlich die Geschwindigkeit suchen, womit er fortgienge, wenn A, B, C allein die Geschwindigkeiten A*α*, B*β*, C*γ* hätten, zweytens auch diejenige, womit er fortgienge, wenn A, B, C, allein die Geschwindigkeiten A*a*, B*b*, C*c* hätten: Hieraus würde sich nach dem 197 § die Geschwindigkeit des Schwerpuncts ergeben. Jene Geschwindigkeit ist hier = 0 (198 §). Also ist auch in diesem Fall, wenn die Massen A, B, C frey fortgehen können, GH die gesuchte Richtung und Geschwindigkeit des Schwerpuncts.

170 §.

Wenn mehr Massen A, B, C, D, von den Kräften P, Q, R, S nach parallelen Richtungen getrieben werden: so geht ihr Schwerpunct G eben so fort, als ob die Summe aller Massen im Schwerpunct vereinigt, und an demselben die Summe aller Kräfte $P+Q+R+S$, jede in ihrer Richtung angebracht wäre. 173 Fig.

Bew. Der Schwerpunct geht nach einer Richtung fort, die mit der mittlern Richtung der Kräfte parallel ist (199 §) und nach eben dieser Richtung würde er gehen, wenn die angenommene Voraussetzung statt hätte. Wenn überdem die Massen nach verflossener Zeit t in A, B, C, D angekommen, und nun α, β, γ, δ ihre Geschwindigkeiten sind: so ist

$$\alpha = \int \frac{2gP}{A} dt, \quad \beta = \int \frac{2gQ}{B} dt, \quad \gamma = \int \frac{2gR}{C} dt,$$

$$\delta = \int \frac{2gS}{D} dt.$$

Ist nun für eben diesen Augenblick k die Geschwindigkeit des Schwerpuncts; so hat man nach dem 195 §

$$k = \frac{2g(\int P dt + \int Q dt + \int R dt + \int S dt)}{A+B+C+D},$$

$$\text{also } dk = \frac{2g(P+Q+R+S)dt}{A+B+C+D}.$$

Wäre aber die Summe aller Massen im Schwerpunct vereiniget, und an demselben die Summe aller Kräfte angebracht: so hätte man ebenfalls

$$dk = \frac{2g(P+Q+R+S)dt}{A+B+C+D};$$

folglich ist die Bewegung des Schwerpuncts in beyden Fällen einerley.

202 §.

Dies muß also vermöge des 200 § auch wahr seyn, wenn gleich alle diese Massen fest unter einander verknüpft sind; und daraus fliest diese merkwürdige Folge: Wenn alle Theilchen eines festen Körpers von gegebenen Kräften nach parallelen Richtungen getrieben werden: so gehet der Schwerpunct mit eben der Bewegung fort, als ob die ganze Masse im Schwerpunct vereinigt, und die Summe aller Kräfte, jede in ihrer Richtung, am Schwerpunct angebracht wäre, welcher Satz noch allgemeiner ist, als derjenige, so im 29 §. erwiesen wurde. Denn dort mußten die Kräfte den Massen proportional seyn, und daher die mittlere Richtung selbst durch den Schwerpunct gehen.

203 §.

Wenn gleich die Richtungen der an *A*, *B*, *C*, *D* angebrachten Kräfte *P*, *Q*, *R*, *S*, nicht parallel sind: so geht dennoch der Schwerpunct eben so fort, als ob in demselben die Masse aller Puncte vereiniget, und an demselben die Summe aller Kräfte angebracht wäre: diese Puncte mögen übrigens fest zusammen hängen, oder frey fortgehen.

177 Fig.

Beweis. Man nehme zuerst an, daß alle Massen A, B, C, D sowohl, als die Richtungen der an ihnen angebrachten Kräfte, in einer Ebene liegen, setze, daß die Bewegung der Massen A, B, C, D gegen ein paar rechtwinklichte Axen EF und EH bekannt

kannt sey. Wenn nun AP, BQ, CR, DS, mit EF parallel sind: so sey die Geschwindigkeit eines jeden der Puncte A, B, C, D am Ende der Zeit t nach den Richtungen EH und EF zerlegt, und nach eben diesen Richtungen zerlege man auch die an A, B, C, D angebrachten Kräfte P, Q, R, S. Wenn nun a, b, c, e, und α, β, γ, ε die Geschwindigkeiten; p, q, r, s, und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, die Kräfte nach den Richtungen EH und EF sind: so hat man

$$a = \frac{2g}{A}\int p\,dt,\quad b = \frac{2g}{B}\int q\,dt,\quad c = \frac{2g}{C}\int r\,dt,$$

$$e = \frac{2g}{D}\int s\,dt$$

$$\alpha = \frac{2g}{A}\int \mathfrak{P}\,dt,\ \beta = \frac{2g}{B}\int \mathfrak{Q}\,dt,\quad \gamma = \frac{2g}{C}\int \mathfrak{R}\,dt,$$

$$\varepsilon = \frac{2g}{D}\int \mathfrak{S}\,dt.$$

Daher gehet der Schwerpunct G nach der Richtung EH, mit der Geschwindigkeit

$$\frac{2g(\int p\,dt + \int q\,dt + \int r\,dt + \int s\,dt)}{A+B+C+D}$$

und nach der Richtung EF mit der Geschwindigkeit

$$\frac{2g(\int \mathfrak{P}\,dt + \int \mathfrak{Q}\,dt + \int \mathfrak{R}\,dt + \int \mathfrak{S}\,dt)}{A+B+C+D}$$ (201 §).

Wenn also jene $= u$; diese $= v$ ist: so wird die Bewegung des Schwerpuncts durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$du = \frac{2g(p+q+r+s)dt}{A+B+C+D}$$

$$dv = \frac{2g(\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}+\mathfrak{R}+\mathfrak{S})dt}{A+B+C+D},$$

woraus die Richtigkeit des behaupteten Satzes erhellet, wenigstens alsdenn, wenn A, B, C, D, und die Richtungen der an diese Puncte angebrachten Kräfte, in einer Ebene liegen. In Fällen, wo diese Voraussetzung nicht statt hat, muß man die Geschwindigkeiten nach den Richtungen dreyer senkrechten Axen zerlegen, und der Beweis bleibt übrigens dem gegenwärtigen völlig ähnlich.

204 §.

Wenn demnach alle Theilchen eines Körpers von gegebenen Kräften getrieben werden: so bewegt sich der Schwerpunct eben so, als wenn alle diese Kräfte, jede in ihrer Richtung, am Schwerpunct angebracht wären, und die ganze Masse des Körpers, in seinem Schwerpuncte beysammen wäre.

Um nun die Bewegung der übrigen Puncte des Körpers zu kennen, ist nur nöthig, ihre relative Bewegung gegen den Schwerpunct zu wissen, daß also die gesammte Untersuchung über die Bewegung eines festen Körpers auf folgende zweene Puncte ankommt. Man bestimmt zuerst die Bewegung des Schwerpuncts, nicht anders, als ob alle Kräfte, die den Körper treiben, jede in ihrer Richtung, am Schwerpuncte angebracht, und die ganze Masse in demselben beysammen wäre. Ist nun die Kraft, welche allen diesen Kräften äquipollent ist, $= P$: so kann man sich hiernächst zweytens vorstellen, es werden alle Theilchen des Körpers von Kräften, die ihren Massen proportional sind, nach parallelen, und der Kraft P grade entgegengesetzten Richtungen getrieben, so daß die Summe aller dieser Kräfte $= P$ ist:

so

so wird der Schwerpunct ruhen, und die relative Bewegung aller übrigen Puncte des Körpers, in Ansehung des Schwerpuncts, übrig bleiben (194 §). Statt aller dieser parallelen Kräfte, könnte auch am Schwerpunct eine der Kraft P gleiche und entgegengesetzte Kraft angebracht seyn: da dann die Sache darauf ankömmt, daß man von der Bewegung der übrigen Puncte des Körpers nunmehro ein richtiges Urtheil fällen könne. Die allgemeine Theorie aber von der relativen Bewegung aller übrigen Puncte des Körpers in Ansehung seines Schwerpuncts, läst sich hier noch nicht vortragen: man wird indessen durch Hülfe der folgenden Untersuchungen einigermassen lernen, worauf diese Sache ankomme.

Der XIV. Abschnitt.

Von der freyen Bewegung fester Körper, die sich beym Fortgehen zugleich um eine Axe drehen.

205 §.

Wenn ein fester Körper sich um eine gewisse grade Linie als eine Axe, gleichförmig drehet, und diese Axe hat in dem Körper eine solche Lage, daß nicht allein alle Schwungkräfte, die von der Bewegung entstehen; sondern auch die Momente dieser Schwungkräfte, womit sie sonst die Axe zu drehen streben, einander aufheben, und also die Axe davon

gar keine Gewalt leidet: so heist sie eine freye Axe des Körpers.

206 §.

Eine solche Axe muß durch den Schwerpunct des Körpers gehen, und keine andre Axe wird diese Eigenschaft haben. Aber auch nicht jede Axe durch den Schwerpunct eines festen Körpers ist eine freye Axe, weil nicht für eine jede solche Axe die Momente der Schwungkräfte, womit sie die Axe um den Schwerpunct zu drehen streben, einander aufheben (152 §).

Wenn sich ein fester Körper gleichförmig um eine freye Axe drehet: so wird diese Bewegung, vermöge der Trägheit, mit einerley Winkelgeschwindigkeit beständig fortgesetzt werden, dafern keine Kräfte vorhanden sind, die diese Bewegung ändern, und die Axe wird beständig in Ruhe bleiben.

207 §.

Wenn überdem allen Puncten des Körpers zugleich einerley Geschwindigkeiten nach parallelen Richtungen mitgetheilt werden: so wird die Umdrehungsaxe, welche vorher in Ruhe war, nun mit paralleler Bewegung fortgehen, d. i. die Lage dieser Axe wird beständig mit ihrer ersten Lage parallel bleiben. Alle übrige Puncte des Körpers werden fortfahren, um diese Axe herum zu laufen, und es kommt nur darauf an, daß man ihre relative Bewegung in Ansehung dieser Axe kenne. Diese relative Bewegung aber ist noch völlig einerley mit der vorigen absoluten Bewegung, da die Axe noch in Ruhe war (194 §).

208 §.

Dafern alle Puncte des festen Körpers nach parallelen

rallelen Richtungen von Kräften getrieben werden, die ihren Massen proportional sind; so wird ebenfalls die Umdrehungsaxe mit paralleler Bewegung fortgehen, die relative Bewegung aller übrigen Puncte um diese Axe aber, ist wiederum einerley mit ihrer vorigen absoluten Bewegung, da die Axe ruhete (194 §). Wenn am Schwerpunct eine Kraft nach eben der Richtung angebracht, und der Summe aller vorigen gleich wäre: so würde eben das erfolgen. Diese Kraft würde dem ganzen Körper eben die Bewegung mittheilen, welche alle vorige zusammen dem Körper mittheilten (60 §).

209 §.

Es ist nicht nöthig, in den Fällen des 207 und 208 §, und andern ähnlichen Fällen, für jede gegebene Zeit t die wahre Geschwindigkeit eines jeden Puncts des festen Körpers zu kennen, und den eigentlichen Weg, den jeder Punct in dieser Zeit t zurückgeleget hat. Dies würde in den meisten Fällen ein weitläuftiges Verfahren erfordern. Wenn man für jede gegebene Zeit t den Ort des Schwerpuncts anzugeben weiß, und zugleich für eben diese Zeit den relativen Ort eines jeden andern Puncts des festen Körpers gegen diesen Schwerpunct: so ist zugleich der absolute Ort dieses Puncts bestimmt. In solcher Absicht müssen für den Anfang der Zeit t folgende Stücke gegeben seyn. Einmahl der wahre Ort des Schwerpuncts, und seine Geschwindigkeit; fürs zweyte, der wahre Ort eines gewissen Puncts dieses Körpers; und fürs dritte, die relative Geschwindigkeit eben dieses Puncts, und zwar beydes, ihre Grösse und Richtung.

Dafern sich der Körper um eine unveränderliche Axe drehet, die während der Bewegung allemahl mit ihrer ersten Lage parallel bleibt: so liegt die Richtung dieser relativen Geschwindigkeit allemahl in einer auf die Umdrehungs-Axe senkrechten Ebene, und die relative Bahn eines jeden Puncts, der nicht in der Axe liegt, ist ein Kreis, dessen Ebene auf der Umdrehungs-Axe senkrecht stehet.

Die relative Geschwindigkeit eines jeden Puncts durch seinen Abstand von der Umdrehungs-Axe dividirt, giebt die relative Winkel-Geschwindigkeit. Wenn nun in Fällen von dieser Art ausser dem wahren Orte und der Geschwindigkeit des Schwerpuncts, die Lage der Umdrehungs-Axe, nebst der Winkelgeschwindigkeit, und dem wahren Orte eines gewissen Puncts, der ausser der Axe liegt, für den Anfang der Bewegung gegeben ist: so bestimmt man für jede gegebene Zeit t nicht allein den wahren Ort des Schwerpuncts, sondern auch den wahren Ort eines jeden andern Puncts, ohne grosse Schwierigkeit, wie die folgenden Untersuchungen mit mehrerm ergeben werden. Einen der leichtesten Fälle, enthält folgende Aufgabe.

210 §.

178 Fig. Ein Körper, dessen Schwerpunct C ist, drehet sich um die freye Axe PQ; sein Schwerpunct geht in der graden Linie CM fort, die auf der Axe PQ senkrecht ist, und eine Kraft $= P$ ist am Schwerpunct nach eben der Richtung CM angebracht. Im Anfange der Zeit t war die Winkel-Geschwindigkeit $= \gamma$, und die Geschwindigkeit des Schwerpuncts $= h$. Der Punct Z liegt in einer auf die Axe durch

C senkrechten Ebene; sein Abstand von der Axe ist $CZ = r$, und im Anfange der Zeit t war der Winkel $ACZ = \alpha$: man sucht für die gegebene Zeit t den Ort, und die Geschwindigkeit des Schwerpuncts, nebst dem Ort und der Geschwindigkeit des Puncts Z.

Aufl. Um den Schwerpunct C, als den Mittelpunct, stelle man sich eine Kugelfläche vor, die durch Z gehet, und CM in A schneidet; durch A sowohl als durch Z und die Axe PQ lege man Ebenen, welche ein paar gröste Kreise dieser Kugel PZQ und PAQ geben: so ist der sphärische Winkel $APZ = \alpha$. Wenn sich nun der Körper gar nicht drehete: so würden im Anfang der Zeit t alle seine Puncte nach Richtungen, die mit CM parallel sind, mit der Geschwindigkeit h fortgehen. Ist also ZD mit CM parallel, und $ZD = Cc = h$: so stellen ZD, Cc die Geschwindigkeiten der Puncte C und Z, im Anfang der Bewegung vor. Aber überdem ist dem Körper die Umdrehungs-Geschwindigkeit γ; also dem Puncte Z nach einer auf CZ senkrechten Richtung, die wahre Geschwindigkeit $\gamma \times r$ mitgetheilt. Man mache demnach $CZE = 90°$, und $EZ = \gamma \times r$; verzeichne das Parallelogramm EZDF: so giebt eigentlich die Diagonale ZF die Grösse und Richtung der wahren Geschwindigkeit des Puncts Z.

Um nun den Fortgang der Bewegung zu bestimmen, kan man füglich beyde Bewegungen während der Rechnung von einander trennen. Man setzt die Umdrehung des Körpers anfangs bey Seite, und sucht die Geschwindigkeit c nebst dem Wege $CM = x$, den der Schwerpunct C in der Zeit t zurücklegt, aus

den

den Gleichungen $dc = \frac{2gP\,dt}{M}$ und $c\,dc = \frac{2gP\,dx}{M}$,

wenn M des Körpers Masse ist, nach dem 112 §. Hierauf betrachtet man die relative Bewegung des Puncts Z, und setzt in solcher Absicht, daß allen Theilchen des Körpers im Anfang der Zeit t die Geschwindigkeit $-h$, der Bewegung entgegen, mitgetheilt und am Schwerpuncte eine Kraft $-P$ angebracht worden. Auf solche Art würde C nebst der Axe ruhen, und jeder Punct Z nur die Geschwindigkeit $EZ = \gamma \times r$, der ganze Körper aber die Winkelgeschwindigkeit γ behalten. Nun ist γ unveränderlich; wenn also in der Zeit t die Linie CZ in die Lage Cz, also Z in z gekommen, und $ACz = \varphi$ ist:

so hat man $\frac{d\varphi}{dt} = \gamma$ (154§) und $\varphi = \gamma t + C$,

wo $C = \alpha$ ist, weil $\varphi = \alpha$, für $t = 0$ wird. Folglich erhält man $\varphi = \gamma t + \alpha$, und es ist eigentlich $ZCz = \gamma t$. Ist nun M der Ort des Schwerpuncts am Ende der Zeit t: so darf man nur MZ′ mit Cz parallel ziehen, und $MZ' = Cz$ machen: so ist Z′ der wahre Ort des Puncts Z am Ende der Zeit t.

Wenn man $Z'e$ auf MZ′ senkrecht setzt, und $Z'e = ZE$ macht; ferner $Z'd$ mit CM parallel zieht, und $Z'd = \int \frac{2gP}{M}\,dt$ nimmt: so giebt die Diagonale $Z'f$, des Parallelogramms $eZ'df$ die wahre Geschwindigkeit des Puncts Z für das Ende der Zeit t.

Weil jeder andre Punct des Körpers sich in einer Ebene bewegt, die mit der Ebene ACZ parallel ist: so siehet man leicht, wie auf jeden andern Punct die Rechnung anzuwenden sey.

211 §.

Man nehme an, es sey an einem festen Körper, der sich um eine gewisse Axe *Ll* drehen kann, eine Kraft V so angebracht, daß ihre Richtung *Vv* in einer Ebene liegt, die auf der Umdrehungsaxe *Ll* senkrecht steht. Es sey ferner an jedem körperlichen Theilchen M eine Kraft angebracht, die dem Product aus der Masse dieses Theilchens in seinen Abstand CM von der Umdrehungsaxe proportional ist, und zwar in einer auf diesen Abstand senkrechten Richtung MN, die zugleich in einer auf die Axe senkrechten Ebene liegt. Wenn nun die Umdrehungs-Beschleunigungen dieser Kräfte, welche nach dem 156 § alle gleich groß seyn werden, auch so groß, sind, als die Umdrehungs-Beschleunigung der Kraft V: so kann man sie der Kürze wegen mit Hr. Euler (Theoria motus corporum solidorum Cap. I. § 296 p. 112.) die der Kraft *V* zugehörigen Elementar-Kräfte nennen. 179 Fig.

Wenn diese Elementar-Kräfte an ihren Massen so angebracht sind, daß sie den Körper auf eine der Kraft V entgegengesetzte Art drehen würden: so sind sie mit V im Gleichgewicht, dafern anders die Axe gehörig unterstützt ist.

212 §.

Die Ebene *ADBE* kann sich um die auf ihr in *C* senkrechte Axe *Ll* drehen, und eine Kraft nach der Richtung *Vv*, welche in dieser Ebene liegt, und um den Abstand $CV = f$ von der Axe entfernt ist, strebt ihre Umdrehung zu beschleunigen: man soll die Summe aller der Kraft *V* zugehörigen Elementar-Kräfte finden. 179 Fig.

Aufl. Es sey M ein verschwindendes Theilchen der Ebene, und MN die an demselben angebrachte Elementar-Kraft. Die Lage dieses Puncts M sey gegen AB und DE, die sich in C senkrecht schneiden, durch ein paar rechtwinklichte Coordinaten $CP = x$, $PM = y$, bestimmt. Man setze des Puncts M Masse $= dM$, und $CM = \sqrt{(xx+yy)} = r$. Wenn nun dM von der Kraft MN würklich bewegt würde, und diese Masse mit der Winkel-Geschwindigkeit γ fortgienge: so wäre die Winkel-Beschleunigung $\frac{d\gamma}{2gdt}$, und die Kraft $MN = \frac{d\gamma}{2gdt} rdM$ (154 §). Man zerlege diese Kraft nach den Richtungen MR und MS mit AB und DE parallel: so wird der Winkel $NMR = 90° - CMR = CMP$; also das Dr. NMR $\sim$ CMP, folglich $MN:MR = CM:MP = Kr.MN:Kr.MR$, und $MN:MS = CM:CP = Kr.MN:Kr.MS$. Dies giebt die Kraft $MR = \frac{d\gamma}{2gdt} ydM$, und die Kraft $MS = \frac{d\gamma}{2gdt} xdM$. Diese Ausdrücke gelten allgemein für jeden Punct M, und man kann nun die mittlere Richtung aller Kräfte MR sowohl, als MS, auf eine ähnliche Art, wie im 140 §, durch die Integralrechnung suchen. Man setze, Hh und Kk sind diese mittlere Richtungen: so werden ein paar Kräfte $Hh = \frac{d\gamma}{2gdt} \int ydM$, und $Kk = \frac{d\gamma}{2gdt} \int xdM$ allen Elementar-Kräften äquipollent seyn. Nun ist ferner der Kraft MR Moment in Ansehung der Axe

$L/ =$

$Ll = \frac{dy}{2gdt} yyd\mathrm{M}$, und der Kraft MS Moment gegen eben die Axe ist $= \frac{dy}{2gdt} xxd\mathrm{M}$; folglich erhält man nach dem 140 §,

$$\mathrm{CH} = \frac{\int yyd\mathrm{M}}{\int yd\mathrm{M}}, \text{ und } \mathrm{CK} = \frac{\int xxd\mathrm{M}}{\int xd\mathrm{M}}.$$

Es ist aber die Beschleunigung der Kraft V nach Vv eben so groß, als die Beschleunigung der Elementar-Kräfte; und nach dem 163 § ist $\frac{dy}{2gdt} = \frac{\mathrm{V}f}{\int rrd\mathrm{M}}$. Also wird die Kraft $\mathrm{H}h = \frac{\mathrm{V}.f\int yd\mathrm{M}}{\int rrd\mathrm{M}}$ und die Kraft $\mathrm{K}k = \frac{\mathrm{V}.f.\int xd\mathrm{M}}{\int rrd\mathrm{M}}$. Ist nun G der Ebene ADBE Schwerpunct, und GF auf AB senkrecht: so hat man $\int yd\mathrm{M} = \mathrm{FG}.\mathrm{M}$, und $\int xd\mathrm{M} = \mathrm{CF}.\mathrm{M}$ (143 §); also die Kraft

$$\mathrm{H}h = \frac{\mathrm{V}.f.\mathrm{FG}.\mathrm{M}}{\int rrd\mathrm{M}}, \text{ und die Kraft}$$

$$\mathrm{K}k = \frac{\mathrm{V}.f.\mathrm{CF}.\mathrm{M}}{\int rrd\mathrm{M}}, \text{ wenn M der ganzen Ebene}$$

Masse bedeutet.

Wenn die Elementar-Kräfte der Kraft V entgegen gesetzt, also die Kräfte $\mathrm{H}h$ und $\mathrm{K}k$ mit V im Gleichgewicht sind: so wird der Punct C der Axe eben so gedrückt, als wenn alle drey Kräfte an C selbst, jede in ihrer Richtung angebracht wären. Verlängert man nemlich $\mathrm{H}h$ und $\mathrm{K}k$, bis sie sich irgendwo schneiden, und zieht vom Durchschnittspunct

nach

nach C eine grade Linie, so kan man sich vorstellen, daß beyde Kräfte H*h* und K*k* am Durchschnittspunkt angebracht sind, und sie sodann auf eine bringen (55 §. St.). Auf solche Art erhält man einen Winkelhebel, wie im 52 § St. Wenn man also C*c* mit V*v* parallel ziehet; ferner C*c* = V,

$$C\alpha = \frac{Vf.FG.M}{\int rrdM}, \quad C\beta = \frac{Vf.CF.M}{\int rrdM}$$

nimmt: so sind dies die Kräfte, welche den Punct C drücken.

Wenn bey eben dieser Voraussetzung AB durch den Schwerpunct gehet, so ist FG = o, also H*h* = Cα = o. Daher drücken nur C*c* und Cβ auf den Punct C. Fällt nun CV in AB, so daß V*v* auf AB senkrecht ist: so sind C*c* und Cβ einander grade entgegengesetzt. Dafern also AB durch den Schwerpunct gehet, folglich G in F fällt, und der Kraft V Richtung auf AB senkrecht ist; so leidet C gar keine Gewalt, wenn C*c* = Cβ, also $V = \frac{Vf.CF.M}{\int rrdM}$ ist.

Dies giebt $f = \frac{\int rrdM}{CF.M}$, oder $f = \frac{\int rrdM}{CG.M}$ weil nun CF = CG ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem 176 §: so ergiebt sich, daß eben der Ausdruck für den Abstand des Mittelpuncts des Schwunges dieser Ebene von C, werde gefunden werden, wenn sie als eine schwere Ebene betrachtet in C aufgehangen wäre und sich um die Axe L*l* schwünge: da dann auch umgekehrt C der Mittelpunct des Schwunges wäre, wenn man sie in O aufhängte (177 §).

Es sey demnach $CO = \frac{\int rrdM}{CG.M}$: so erhellet, wenn

in

in O eine Kraft V, nach der Richtung Oω auf CO senkrecht drückte; an allen Puncten der Ebene aber entgegengesetzte der Kraft V zugehörige Elementarkräfte angebracht wären: daß der Punct C von allen diesen Kräften zusammen gar keinen Druck litte.

Dafern nicht allein AB, sondern auch DE durch den Schwerpunct gehet, also C in G fällt; so wird nicht nur FG = o, sondern auch CF = o. Dies giebt Hh = o, nnd Kk = o, so daß in diesem Fall alle Elementar-Kräfte einander aufheben. Sind demnach auch in diesem Fall die Elementarkräfte mit V im Gleichgewicht, so leidet der Punct C allein den Druck Cc = V nach einer mit Vv parallelen Richtung.

213 §.

Die Ebene *ADBE*, deren Schwerpunct C ist, wird von der Kraft *V* beschleunigt, und ihre Richtung *Vv* liegt in eben dieser Ebene in der Entfernung *CV* = *f* vom Schwerpunct: man soll alle Umstände der Bewegung bestimmen, welche die Kraft *V* der Ebene mittheilt.

Aufl. Wenn L*l* eine feste auf der Ebene ADBE senkrechte Axe wäre, die zulänglich gehalten würde; so theilte die Kraft V der Ebene ADBE eine Umdrehungsbewegung um diese Axe mit, die sich nach dem 162 § bestimmen liesse. Wären aber an allen Puncten der Ebene ADBE die der Kraft V zugehörigen, ihr aber entgegen gesetzten Elementar-Kräfte angebracht; so würde die Ebene in Ruhe bleiben: die Axe aber in dem Punct C von einer Kraft = V nach der Richtung Cc mit Vv parallel gedrückt werden. Deswegen sey an C eine Kraft = V nach der

entgegen gesetzten Richtung Cγ angebracht, so bedarf auch die Axe keiner weitern Unterstützung, und die Elementarkräfte, mit der Kraft Cγ zusammen, sind mit V im Gleichgewicht. Hieraus folgt, daß diese eben genannten Kräfte zusammen, der Ebene eben die Bewegung, nur auf entgegen gesetzte Art, mittheilen würden, die ihr die Kraft V allein mittheilt. Daher geht die Bewegung eben so fort, als wenn am Schwerpunct die Kraft Cc = V, an allen Theilchen der Ebene aber statt der Kraft V die ihr zugehörigen Elementar-Kräfte angebracht wären. Weil nun die Summe der Elementarkräfte = o ist (212 §), so würden diese allein die Ebene blos um die Axe Ll drehen, ohne dem Schwerpunct und mit demselben der Axe einige Bewegung mitzutheilen (203 §), und weil Ll, vermöge des 144 §, eine freye Axe ist, so werden auch die Schwungkräfte, die aus der Umdrehung entspringen, der Axe keine Bewegung mittheilen. Die am Schwerpunct angebrachte Kraft V aber beschleunigt blos die fortgehende Bewegung. Demnach suche man zuerst die Bewegung des Schwerpuncts eben so, als wenn in demselben die ganze Masse der Ebene beysammen, und an ihm die Kraft V in ihrer Richtung angebracht wäre. Hierauf nehme man an, es sey gleich im Anfang der Bewegung die Würkung der Kraft V durch eine ihr gleiche und entgegen gesetzte aufgehoben (203 §): so erhellet, daß die relative Bewegung der übrigen Puncte, in Ansehung des Schwerpuncts mit der Umdrehungs-Bewegung einerley sey, welche die der Kraft V zugehörigen Elementarkräfte der Ebene ADBE um die feste Axe Ll mittheilen würden: deren Fortgang also eben so, wie im

162 § aus der Gleichung $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gVf}{\int rr dM}$ gefunden wird, wenn γ die Winkelgeschwindigkeit für die Zeit t ist. Hätte der Schwerpunct im Anfang der Zeit t schon eine gewisse Geschwindigkeit, so weiß man, daß die relative Bewegung der übrigen Puncte dieselbe bleibe, wenn man zugleich annimmt, daß im Anfang der Zeit t allen Theilchen des Körpers eine eben so grosse Geschwindigkeit nach entgegen gesetzter Richtung mitgetheilt wäre.

214 §.

Es sey nunmehro G der Schwerpunct der Ebene ADBE, und $O\omega$ die Richtung der Kraft V. Auf $O\omega$ sey GO durch den Schwerpunct senkrecht gesetzt. Wenn nun die ganze Ebene, bevor die Kraft V angebracht worden, geruhet hat, so wird es in der Linie GO einen Punct C auf der andern Seite des Schwerpuncts geben, der beym ersten Anfang der Bewegung in völliger Ruhe bleibt, so daß die Ebene anfängt, sich um C zu drehen. In dem Augenblick nemlich, da der Schwerpunct G, und mit demselben jeder andre Punct der Ebene ADBE, anfängt, nach der auf GO senkrechten Richtung mit $O\omega$ parallel fortzugehen, fangen die Puncte der Linie CG, die sich von G durch C erstrecken, zugleich an, vermöge der ihnen mitgetheilten Umdrehungsbewegung nach der grade entgegen gesetzten Richtung zu gehen. Giebt es nun in GC einen Punct, dessen Beschleunigung wegen der einen Bewegung so groß, als wegen der andern ist; so wird er im ersten Anfang der Bewegung ruhig bleiben. Man nehme an, daß C dieser Punct sey, so ist wegen der Bewegung nach 179 Fig.

$O\omega$ seine Beschleunigung $= \frac{V}{M}$, und wegen der Umdrehung ist die Beschleunigung desselben nach der grade entgegen gesetzten Richtung $= \frac{V.OG.CG}{\int rrdM}$.

Beyde gleich gesetzt, geben $CG = \frac{\int rrdM}{OG.M}$, und $OG = \frac{\int rrdM}{CG.M}$, so daß der Abstand des Puncts C vom Schwerpunct aus dem Abstand der Kraft V von eben dem Schwerpunct, und umgekehrt, der letzte aus dem ersten, vermittelst dieser Gleichung, gefunden werden kann.

Dieser Punct C nennt Joh. Bernoulli (Oper. T. IV. N. CLXXVII. p. 265 seqq.) den Mittelpunct der freyen Umdrehung, (centrum rotationis spontaneum) und derselbe liegt in dem hier betrachteten Fall in der graden Linie, welche durch den Schwerpunct auf die Richtung der Kraft V senkrecht steht. In der gefundenen Gleichung ist $\int rrdM$ das Moment der Trägheit der Ebene ADBE, in Ansehung einer durch den Schwerpunct auf ihr senkrechten Axe. Wenn man dies Moment $= Mkk$ setzt, so wird $CG = \frac{kk}{OG}$; folglich $CO = OG + \frac{kk}{OG}$

$$= \frac{OG^2 + kk}{OG} = \frac{M(OG^2 + kk)}{M.OG},$$ wo

$M(OG^2 + kk)$ das Moment der Trägheit der Ebene in Ansehung einer durch O auf ihr senkrechten Axe ist (164 §). Wenn demnach ADBE, als eine schwere Ebene betrachtet, in O aufgehängt wäre, so daß

sie

sie sich um eine durch O auf ihr senkrechte Axe schwingen könnte: so wäre C ihr Mittelpunct des Schwunges (177 §). Ist also der Abstand GO der Richtung der Kraft V vom Schwerpunct gegeben: so wird der Mittelpunct der freyen Umdrehung eben so, wie der Mittelpunct des Schwunges gefunden. Stellet man sich durch C eine senkrechte Axe L*l* vor, und an allen Puncten der Ebene die der Kraft V zugehörigen, ihr aber entgegen gesetzten Elementarkräfte, so erhellet, daß dies eben der Punct sey, der nach dem 212 § gar keinen Druck litte.

215 §.

Die Ebene *ABHI* kann sich um die in dieser Ebene liegende Axe *Ll* drehen: Eine Kraft *V* nach der Richtung *Dd* auf diese Ebene senkrecht, in der Entfernung $DE = f$, von der Axe, strebt die Ebene zu drehen; man soll die Summe aller der Kraft *V* zugehörigen Elementar-Kräfte suchen. 180 Fig.

Aufl. Die Lage eines jeden Theilchens M, dessen Masse $= dM$ ist, sey durch die senkrechten Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, gegen AB und AI, die sich in A senkrecht schneiden, bestimmt. Wenn nun die Elementar-Kraft MN die Masse dM würklich bewegte, und diese Masse mit der Winkelgeschwindigkeit γ fortginge: so wäre die Kraft $MN = \frac{d\gamma}{2gdt} y dM$ (154 §). Weil nun alle diese Kräfte auf ABHI senkrecht sind: so setze man, ihre mittlere Richtung gehe durch K, und es sey CK auf L*l* oder AB senkrecht. Vermöge dieser Voraussetzung wird

$AC = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM}$, und $CK = \frac{\int yy\,dM}{\int y\,dM}$, und eine Kraft Kk auf ABHI senkrecht, und $= \frac{d\gamma}{2g\,dt} \int y\,dM$ ist allen Elementar-Kräften äquipollent. Nun ist ferner $\frac{d\gamma}{2g\,dt} = \frac{Vf}{\int yy\,dM}$; also wird die Kraft $Kk = \frac{Vf.\int y\,dM}{\int yy\,dM}$. Es sey G der Ebene Schwerpunct, und GF auf AB senkrecht: so ist $\int y\,dM = FG.M$, wenn M der ganzen Ebene Masse ist, und es wird die Kraft $Kk = \frac{Vf.FG.M}{\int yy\,dM}$.

Wenn die Elementarkräfte der Kraft V entgegengesetzt sind, also Kk mit $V = Dd$ im Gleichgewicht ist; so wird die Axe Ll eben so gedrückt, als wenn V in E und Kk in C, jede nach ihrer Richtung angebracht wäre. Demnach ziehe man Cc mit Kk, und Ee mit Dd parallel: so leidet die Axe in E den Druck $Ee = V$, und in C den Druck $Cc = Kk = \frac{Vf.FG.M}{\int yy\,dM}$.

216 §.

Dafern bey eben dieser Voraussetzung $AE = AC = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM}$ ist; also DE in CK und E in C fällt: so sind Ee und Cc einander grade entgegengesetzt. Ist nun überdem $Ee = Cc$, also $V = \frac{Vf.FG.M}{\int yy\,dM}$, folglich $f = \frac{\int yy\,dM}{FG.M} = CK$, so daß D in K fällt:

so

so leidet die Axe gar keine Gewalt. Die Uebereinstimmung so wohl, als die Verschiedenheit zwischen dieser Auflösung, und der Aufgabe des 212 §, fällt leicht in die Augen. Es wird hier der Punct K wiederum vermittelst einer ähnlichen Formul, wie der Mittelpunct des Schwunges gefunden, wenn man $CK = \frac{\int yyd M}{FG.M}$ nimmt. Jedoch giebt dieser Ausdruck nur seinen Abstand von der Umdrehungsaxe, und er liegt hier nicht allemahl, wie im 212 § der Punct O in einer durch den Schwerpunct, auf die Umdrehungsaxe senkrecht gesetzten graden Linie, ohne nur in dem Fall, wenn $AF = AC = \frac{\int xyd M}{\int yd M}$, also $FC = o$ ist.

Wenn man $FP = u$ setzt: so hat man $FC = \frac{\int uyd M}{\int yd M}$. Soll dieser Ausdruck $= o$ seyn: so muß $\int uyd M = o$ seyn, und die Vergleichung mit dem 148 § ergiebt, daß in diesem Fall die Momente aller Schwungkräfte, welche die Axe Ll drehen wirken, einander aufheben müssen. Nimt man demnach in diesem Fall $FO = CK = \frac{\int yyd M}{FG.M}$, und bringt V nach der Richtung $O\omega$ auf der Ebene ABHI senkrecht an, so leidet die Axe Ll im Zustande des Gleichgewichts der Kraft V mit den zugehörigen Elementarkräften gar keinen Druck.

217 §.

Wenn bey eben diesen Voraussetzungen die Kraft V in einem andern von O unterschiedenen Puncte Δ an-

angebracht ist: so wird V der Kraft Kk nicht gleich seyn, weil $FO.Kk = F\Delta.V$ seyn muß. Daher wird nun F von der Differenz der Kräfte V nnd Kk gedrückt. Wenn aber zugleich die Umdrehungsare

181 Fig. durch den Schwerpunct gehet: so ist $FG = o$; also $Kk = o$, und die Axe leidet in G allein den Druck $Gg = V$. Deswegen wird eine eben so grosse und entgegengesetzte Kraft $G\gamma$ das Gleichgewicht herstellen. Wenn nun alle diese vorausgesetzten Bedingungen statt haben, also Ll nicht allein durch den Schwerpunct gehet, sondern auch überdem eine freye Axe ist; so läst sich über die Bewegung, welche die Kraft V allein der Ebene ABHI mittheilt, auf eine ähnliche Art, wie im 214 §, urtheilen.

Am Schwerpunct G sey eine Kraft $G\gamma = V$ nach entgegengesetzter Richtung angebracht, so ist diese, nebst den der Kraft V entgegengesetzten Elementar-Kräften, mit V im Gleichgewicht, und jene Kräfte zusammen werden der Ebene eben die Bewegung nur auf entgegengesetzte Art mittheilen, die ihr V allein mittheilt. Deswegen geht die Bewegung eben so fort, als wenn am Schwerpunct die Kraft $Gg = V$, an allen Theilchen der Ebene aber die der Kraft V zugehörigen Elementarkräfte angebracht wären. Ist also zuerst die Bewegung des Schwerpuncts nach dem 112. 113. 203 § bestimmt; und man nimmt nun an, es sey an G die Kraft $G\gamma$, der Kraft V gleich, und entgegengesetzt angebracht: so wird die relative Bewegung der übrigen Puncte der Ebene, mit der Umdrehungs-Bewegung um die feste Axe Ll übereinkommen, welche die Gleichung $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g.V.G\Delta}{\int yyd M}$ bestimmt. In keinem andern Fall aber

aber wird die relative Bewegung mit einer bloßen Umdrehung um die feste Axe Ll einerley seyn, sondern diese Axe wird gleichfalls aus ihrer Lage gebracht werden. Uebrigens giebt es in dem eben betrachteten Fall in der Linie $G\Delta$ auf der andern Seite des Schwerpuncts, wie im 214 §, einen **Mittelpunct der freyen Umdrehung**, und eine durch ihn auf $G\Delta$ senkrechte Axe kan hier **die Axe der freyen Umdrehung heissen.**

Wäre V nicht in der Linie $G\Delta$; sondern in D, nach der Richtung Dd, in einer Ebene angebracht, welche die Axe in E senkrecht schneidet; so würde in dem Fall des Gleichgewichts der Kraft V mit den Elementarkräften die Axe in dem Punct E, nach der Richtung Ee, den Druck $=V$ leiden. Wenn man nun gleich nach dem 204ten §, die Bewegung des Schwerpuncts, wie vorhin, durch die Kraft $G\gamma = V$ hemmet; so ist noch nicht alles im Gleichgewicht: der Schwerpunct G bleibt zwar in Ruhe, aber die Kraft Ee wird noch die Axe um G drehen, wenn sie nicht gehalten wird.

218 §.

Die Axe Ll wird in zweenen Puncten A und B gehalten: man sucht bey den Voraussetzungen des 215 §, im Fall des Gleichgewichts der Kraft V mit den zugehörigen Elementarkräften, wie stark beyde Puncte gedrückt werden. 180 Fig.

Aufl. Man setze $AB = a$, und $AE = b$, weil die Lage der Ebene EDd gegeben seyn muß: so ist $BE = a - b$. Nun wird E von der Kraft $Ee = V$ gedrückt. Man ziehe Aa und Bb mit Ee parallel: so werden ein paar Kräfte $Aa = \frac{(a-b)V}{a}$, und

$Bb = \frac{b.V}{a}$, der Kraft $Cc = V$ äquipollent seyn.

Man setze ferner $AP = x$; $PM = y$: so wird C von der Kraft $Cc = \frac{Vf.FG.M}{\int yydM}$ gedrückt, und es ist $AC = \frac{\int xydM}{FG.M}$. Man ziehe $A\alpha$ und $B\beta$ mit Cc parallel: so werden die Kräfte

$$A\alpha = \frac{BC.Cc}{a} = Cc - \frac{AC.Cc}{a}, \text{ und}$$

$F\beta = \frac{AC.Cc}{a}$ der Kraft Cc äquipollent seyn.

Nun ist $AC.Cc = \frac{Vf.\int xydM}{\int yydM}$, daher wird

$$A\alpha = \frac{Vf}{\int yydM}\left(FG.M - \frac{\int xydM}{a}\right), \text{ und}$$

$$B\beta = \frac{Vf.\int xydM}{a\int yydM}.$$

Demnach wird A von der Differenz der Kräfte $A\alpha$ und $A\alpha$, B aber von der Differenz der Kräfte Bb und $B\beta$ gedrückt.

Soll die Axe gar keine Gewalt leiden: so müssen beyde Differenzen $= o$ seyn. Dies giebt

$$\frac{(a-b)V}{a} = \frac{Vf}{\int yydM}\left(FG.M - \frac{\int xydM}{a}\right)$$

$$\text{und } \frac{b}{a}V = \frac{Vf.\int xydM}{a.\int yydM}, \text{ folglich wird}$$

$$a - b = \frac{af.FG.M}{\int yydM} - \frac{f.\int xydM}{\int yydM}, \text{ und}$$

und $b = \frac{f.\int xy d\mathrm{M}}{\int yy d\mathrm{M}}$;

also ferner $1 = \frac{f.\mathrm{FG}.\mathrm{M}}{\int yy d\mathrm{M}}$; oder

$f = \frac{\int yy d\mathrm{M}}{\mathrm{FG}.\mathrm{M}}$, und $b = \frac{\int xy d\mathrm{M}}{\mathrm{FG}.\mathrm{M}}\,\mathrm{AC}$,

wie im 212 §.

Wenn die Umdrehungsaxe durch den Schwerpunct 181
gehet: so wird $\mathrm{FG} = 0$, und die Kräfte $\mathrm{A}\alpha$ und $\mathrm{B}\beta$ Fig.
werden gleich und entgegengesetzt. Es wird jede für
sich, ohne Absicht auf ihre Richtung $\frac{V f.\int xy d\mathrm{M}}{a \int yy d\mathrm{M}}$.

Man setze $\mathrm{FP} = u$, und $\mathrm{AF} = c$: so ist $x = \mathrm{AP} = \mathrm{AF} + \mathrm{FP} = c + u$; also $\int xy d\mathrm{M} = c \int y d\mathrm{M} + \int uy d\mathrm{M}$, und

$$\mathrm{A}\alpha = \frac{Vf}{\int yy d\mathrm{M}} \left(\mathrm{FG}.\mathrm{M} - \mathrm{C}.\mathrm{FG}.\mathrm{M} - \frac{\int uy d\mathrm{M}}{a} \right)$$

$$\mathrm{A}\beta = \frac{Vf}{\int yy d\mathrm{M}} \left(c.\mathrm{FG}.\mathrm{M} + \frac{\int uy d\mathrm{M}}{a} \right).$$

Wenn demnach $\mathrm{FG} = 0$ ist, also $\mathrm{L}l$ durch den Schwerpunct gehet: so werden dennoch diese beyden Kräfte nicht $= 0$, dafern nicht zugleich $\int uy d\mathrm{M} = 0$, also $\mathrm{L}l$ eine freye Axe ist.

Wenn also gleich $\Delta\delta$ in einer senkrecht durch den Schwerpunct geführten Ebene liegt, und es ist $\mathrm{L}l$ keine freye Axe, also $\int uy d\mathrm{M}$ nicht $= 0$: so wird zwar eine am Schwerpunct angebrachte Kraft $\mathrm{G}\gamma$, die der Kraft V gleich und entgegengesetzt ist, die Bewegung des Schwerpuncts hemmen. Allein die

Kräf-

Kräfte $A\alpha$ und $B\beta = -A\alpha$ werden die Axe noch um G zu drehen streben.

219 §.

182 Fig. Ein fester Körper kann sich um die Axe *AB* drehen, und eine Kraft *V* nach der Richtung *Dd*, in einer auf die Axe senkrechten Ebene, strebt den Körper um *AB* zu beschleunigen: man soll die Summe aller der Kraft *V* zugehörigen Elementarkräfte suchen.

Aufl. Es sey die Lage aller Puncte M des Körpers gegen drey Ebenen BAX, BAY, XAY, die sich in A senkrecht schneiden, durch drey rechtwinklichte Coordinaten $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ bestimmt. Es sey dM des Theilchens M Masse, und $PM = r$. Gienge nun der ganze Körper um die feste Axe AB mit der Winkel-Geschwindigkeit γ herum: so wäre der Kraft V Winkel-Beschleunigung $\frac{d\gamma}{2gdt} = \frac{Vf}{\int rrdM}$; und wenn der zugehörigen Elementarkraft MN Winkel-Beschleunigung eben so groß seyn soll: so hat man $MN = \frac{d\gamma}{2gdt} rdM$ (154 §) $= \frac{Vf.rdM}{\int rrdM}$. Diese zerlege man nach den Richtungen QP und QM, in die Kräfte MR und MS: so erhält man, wie im 215 §, $MR = \frac{d\gamma}{2gdt} zdM$, und $MS = \frac{d\gamma}{2gdt} ydM$. Nun sey Hh die mittlere

Rich-

Richtung aller Kräfte MR, und Kk die mittlere Richtung aller Kräfte MS. Ueberdem sey HI in der Ebene BAX auf AB, und KL in der Ebene BAY auf AB senkrecht: so wird die Kr. $Hh = \frac{d\gamma}{2gdt} \int z dM = \frac{V f. \int z dM}{\int r r dM}$, $AI = \frac{\int x z dM}{\int z dM}$, $IH = \frac{\int z z dM}{\int z dM}$.

Ferner die Kr. $Kk = \frac{d\gamma}{2gdt} \int y dM = \frac{V f. \int y dM}{\int r r dM}$;

$AL = \frac{\int x y dM}{\int y dM}$; $LK = \frac{\int y y dM}{\int y dM}$.

Dafern also die Elementarkräfte der Kraft V entgegen gesetzt, und mit ihr im Gleichgewicht sind, und man ziehet durch C, I und L nunmehro Cc, Ii, Ll, den Linien Dd, Hh, Kk parallel und gleich: so drücken in den Puncten C, I, L auf die Axe die Kräfte

$Cc = V$; $Ii = \frac{V f. \int z dM}{\int r r dM}$; $Ll = \frac{V f. \int y dM}{\int r r dM}$.

Es sey G des Körpers Schwerpunct, und GF auf BAY, FE auf AB senkrecht: so ist $FF.M = \int y dM$, und $FG.M = \int z dM$, daher wird $Ii = \frac{V f. FG.M}{\int r r dM}$;

$Ll = \frac{V f. EF.M}{\int r r dM}$.

220 §.

Wenn $AL = AI = AC$ ist: so liegen die Richtungen der dreyen Kräfte Cc, Ii, Ll in einer Ebene; und wenn überdem $Cc = \sqrt{(Ii^2 + Ll^2)}$ ist: so sind alle drey im Gleichgewicht, und die Axe leidet gar

keine

keine Gewalt. Die letzte Voraussetzung giebt

$$V = \frac{Vf.M}{frrdM}\sqrt{(FG^2 + EF^2)},$$

oder $V = \frac{Vf.M}{frrdM}EG$, und daraus folgt

$$f = \frac{frrdM}{EG.M} = CD.$$ Eben dieser Ausdruck giebt den Mittelpunct des Schwunges, wenn der Körper, als ein schwerer Körper betrachtet, sich um die Axe AB schwingt. Nur liegt hier wiederum der Punct D, wo V angebracht werden muß, nicht allemahl in EG.

Wenn man den Anfangspunct der Abscissen nicht in A, sondern in E nimmt, und $EP = z$ setzt: so hat man $EI = \frac{fuzdM}{fuydM}$, und $EL = \frac{fuydM}{fuydM}$. Nun fallen die Puncte L und I in E zusammen, wenn $EL = EI = 0$ ist, also muß $fuzdM = 0$, und $fuydM = 0$ seyn, wenn I und L in E zusammenfallen sollen, d. i. die Momente der Schwungkräfte, womit sie die Axe AB um E drehen würden, müssen einander aufheben (152 §). Es wird also nunmehro E von den Kräften $Ee = \frac{Vf.FG.M}{frrdM}$, und

$Es = \frac{Vf.EF.M}{frrdM}$ gedrückt. Und wenn nun auf EG das Stück $EO = \frac{frrdM}{EG.M}$ genommen wird, und an O die Kraft $Oo = V$ gehörig angebracht ist: so wird überdem E von der Kraft $Eo = V$ gedrückt, und

und diese drey Kräfte sind im Gleichgewicht. Wird eine andre Kraft $\Delta\delta$ in eben dieser Ebene statt $O\omega$ angebracht, die eben das Moment hat: so drücken den Punct E die drey Kräfte Ee, $E\varepsilon$, Ek, und diese erhalten sich einander nicht im Gleichgewicht.

Dafern diese letzten Voraussetzungen alle bleiben, und überdem die Umdrehungs-Axe AB selbst durch den Schwerpunct gehet: so ist $EF = o$, und $FG = o$, also $Ee = o$, und $E\varepsilon = o$. Folglich leidet der Punct E, welcher nun mit dem Schwerpunct G einerley ist, nur den Druck $Ek = \Delta\delta$, und eine eben so grosse, an E oder G entgegengesetzt, angebrachte Kraft stellet das Gleichgewicht her.

221 §.

Wenn demnach alle diese Voraussetzungen statt haben, also AB nicht allein durch den Schwerpunct gehet, sondern auch überdem eine freye Axe ist, und die Richtung $\Delta\delta$ der Kraft V in einer durch den Schwerpunct auf die Axe senkrechten Ebene liegt; so wird die Kraft V allein dem Körper eben die Bewegung mittheilen, welche eine ihr gleich und parallel am Schwerpunct angebrachte Kraft Ek nebst den ihr zugehörigen Elementar-Kräften zusammen ihm mittheilen würden. Wenn man die Bewegung des Schwerpuncts nach dem 204 § hemmet; so wird der ganze Körper sich um AB als eine feste Axe drehen, und die Kraft $\Delta\delta = V$ wird die Umdrehung so beschleunigen, daß die Gleichung $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g.Vf}{\int rrdM}$ die Bewegung bestimmt.

Man kan übrigens auf eine ähnliche Art, wie im 218 §, suchen, wie stark ein paar gegebene Puncte

A und B der Axe, gedruckt werden, indem man statt Cc, Ii und Ll ein paar andre an A und B angebrachte Kräfte sucht, die ihnen äquipollent sind, da sich denn ohne Schwierigkeit ergiebt, daß nur in dem eben betrachteten einzigen Fall eine der Kraft V gleiche, am Schwerpunct entgegengesetzt angebrachte Kraft das völlige Gleichgewicht zwischen der Kraft V und den zugehörigen Elementarkräften so herstelle, daß die Axe keiner weitern Unterstützung bedarf; in allen übrigen Fällen aber Kräfte übrig bleiben, welche die Axe um den Schwerpunct zu drehen streben.

222 §.

Diese bisherige Theorie von der freyen Bewegung fester Körper, die sich zugleich um eine Axe drehen, wird genügen, einigermassen zu zeigen, worauf es bey allgemeiner Untersuchung über die freye Bewegung fester Körper ankomme. Sie wird zugleich Herrn Eulers Vortrag, davon in seiner Theoria motus corporum solidorum Cap. III. IV & VIII. erläutern. Die fernere Ausführung davon erfordert mehr Theorie, als bisher vorausgesetzt ist, und deswegen muß das übrige hier noch ausgesetzt bleiben. Die bisherige Ausführung begreift alles, was seit Galilei Zeit davon, bis dahin, bekannt gewesen ist, da die Herren von Segner, Euler und d'Alembert diese Theorie zu mehrerer Vollkommenheit gebracht haben. Herr von Segner erfand zuerst den wichtigen Satz: daß jeder Körper wenigstens drey freye Axen habe, um welche sich derselbe frey drehen kann, und daß diese drey Axen im Schwerpunct auf einander senkrecht stehen. Er machte diesen Satz in einer zu Halle

1755 herausgegebenen kleinen Schrift: Specimen theoriæ turbinum, bekannt. Hr. Euler bauete hierauf die ganze Theorie von der freyen Bewegung fester Körper, in seiner im Jahr 1765 bekannt gewordenen Theoria motus corporum solidorum; und das allgemeine dieser Theorie beruhet auf folgende Sätze:

An dem festen Körper mögen so viele Kräfte, als man will, angebracht seyn: so wird zuerst der Weg und die übrigen Umstände der Bewegung des Schwerpuncts gesucht, nicht anders, als wenn alle Kräfte, jede in ihrer Richtung, am Schwerpunct angebracht, und die ganze Masse des Körpers im Schwerpunct vereinigt wäre. Hierauf nimmt man an, daß im Anfang der Bewegung am Schwerpunct die entgegengesetzten Kräfte angebracht, und derselbe zur Ruhe gebracht worden; da dann die relative Bewegung der übrigen Puncte in einer gewissen Umdrehung um den Schwerpunct bestehen muß. Nun mag sich ein fester Körper um seinen ruhenden Schwerpunct, wie man will, drehen: so läst sich zeigen, daß in jedem Augenblick ausser dem Schwerpunct noch ein Punct des Körpers ruhen müsse, und daraus folgt, daß in eben diesem Augenblick alle übrige Puncte des Körpers, die in der graden Linie durch beyde Puncte liegen, ebenfalls ruhen. Deswegen kann die Bewegung aller übrigen Puncte so betrachtet werden, als wenn der ganze Körper sich in eben diesem Augenblick um die gedachte Linie, als eine Axe drehete. Dann hat aber diese Linie in jedem folgenden Augenblick in dem Körper eine andre Lage, und die gesammte Bewegung des Körpers wird nun auf folyende Art bestimmt. Man sucht für jede gegebene Zeit

1) Die Lage der Axe, um welche sich der Körper jetzt drehet, gegen seine drey Hauptaxen.

2) Seine Umdrehungs-Geschwindigkeit um diese Axe, und

3) Die Lage der Hauptaxen des Körpers gegen gewisse bekannte Grenzen des Raums, worin sich der Körper bewegt.

223 §.

Herr d'Alembert hat sich mit dieser Untersuchung schon in den Recherches sur la procession des Equinoxes Paris 1749 beschäftigt, und die astronomische Theorie vom Wanken der Erdaxe, und dem Fortrücken der Nachtgleichen, darauf gebauet. Eben diese Untersuchung hat er in den Opuscules Mathematiques a Paris 1761. T.I. p. 74 seqq. noch allgemeiner angestellt. Er betrachtet den Schwerpunct, oder statt desselben einen jeden andern bekannten Punct des Körpers in Ruhe, und nimmt drey Ebenen, die sich in diesem Punct rechtwinklicht schneiden, für die bekannten Grenzen des Raums, worin sich der Körper bewegt. Er betrachtet ferner eine grade Linie, die durch diesen ruhenden, und andre bekannte Puncte des Körpers gehet, als eine bewegliche Axe des Körpers, um welche sich der ganze Körper drehet, indem diese Axe zugleich ihre Lage ändert. Beyde Methoden sind darinnen unterschieden, daß bey der Eulerischen die Umdrehungsaxe beständig durch andre und andre Puncte des Körpers durchgehet; und für jeden Augenblick würklich ruhet, so daß für jeden solchen Augenblick die Umdrehung des Körpers um diese Axe mit einer Umdrehung um eine feste Axe übereinkommt. Bey der d'Alembertischen Methode geht diese Umdrehungsaxe beständig

durch

durch eben dieselben Puncte des Körpers, und ist eigentlich nie ruhig, so daß die übrige Bewegung des Körpers eigentlich nur eine relative Umdrehungsbewegung um diese Axe ist, die übrig bleiben würde, wenn der Axe ihre Bewegung genommen würde. Beyde Methoden führen indessen zu einerley Resultat, und wie eine Methode sich mit der andern vergleichen lasse, wird bey der weitern Ausführung dieser Theorie, in den folgenden Theilen dieses Lehrbegrifs, mit mehrern gezeigt werden.

Der XV. Abschnitt.

Vom centralen Stosse der Körper an einander.

224 §.

Ein Körper stößt an den andern, wenn der erste seine Bewegung nicht ungeändert fortsetzen kann, ohne den andern, dafern er ruhet, in Bewegung zu setzen; oder wenigstens, wenn er ebenfalls in Bewegung ist, seine Bewegung zu ändern. Dafern der Schwerpunct A eines Körpers in der graden Linie AN fortgehet, und sich in eben dieser graden Linie der Schwerpunct B eines andern Körpers bewegt: so giebt es zweene Fälle, in welchen beyde Körper zusammenstossen werden. Einmahl, wenn A und B sich nach grade entgegengesetzten Richtungen, und zwar A gegen B, B aber gegen A, bewegen. Fürs zweyte, wenn beyde zwar nach einerley Richtung AN fortgehen, der vorderste Körper B aber langsa- 183 Fig.

mer, als der hinterste A fortgehet. Wäre der vorderste Körper B überall in Ruhe; so würde ebenfalls ein Stoß erfolgen, wenn A den Körper B erreicht. In allen Fällen wird ein jeder von diesen Körpern den Zustand der Ruhe, oder Bewegung des andern ändern, und diese Aenderung wird in dem Augenblick ihren Anfang nehmen, da beyde Körper anfangen einander zu berühren.

225 §.

Es können sich übrigens die Körper, wovon einer an den andern stößt, auf mancherley Art vor dem Stosse bewegen. Sie können sich nemlich, indem sie vorwärts gehen, zugleich um sich selbst drehen. Hier aber wird zuerst blos der Fall betrachtet werden, wenn alle Puncte der Körper mit gleichen Geschwindigkeiten nach parallelen Richtungen fortgehen. Es kann auch ein Stoß erfolgen, wenn gleich die Richtungen der Schwerpuncte in dem Augenblick, da die erste Berührung erfolgt, nicht in einerley Linie liegen; da sie dann entweder parallel seyn, oder sich unter einem gewissen Winkel schneiden werden. Von allen diesen Fällen soll zuerst derjenige betrachtet werden, bey welchem die Richtungen der Schwerpuncte in einerley Linie liegen.

183 Fig.

226 §.

Man nehme also an, indem der Körper B nach *b* gegangen, sey A in *a* angekommen; und setze, daß in eben diesem Augenblick ein Körper den andern bey C zu berühren anfange: so wird es von der Gestalt der Körper abhängen, ob die Berührung nur in einem, oder in mehrern Puncten erfolge. Die Berührung wird in einem Punct geschehen, wenn z. E.

beyde

beyde Körper Kugeln sind. In diesem und ähnlichen Fällen stelle man sich eine Ebene DE vor, die beyder Körper Oberflächen in C berührt, und durch C sey auf diese Ebene eine grade Linie senkrecht gesetzt.

Dafern nun diese grade Linie mit der Richtung der Bewegung beyder Körper einerley ist: so sagt man, die Körper stossen grade an einander, und der Stoß heist ein grader Stoß. Wenn überdem eben diese Linie durch beyder Körper Schwerpuncte gehet, wie in dem Fall, wenn die Körper Kugeln sind: so heist der Stoß ein centraler Stoß; im entgegengesetzten Fall kan man ihn einen eccentrischen Stoß nennen.

227 §.

Es kann aber auch das, worin beyde Körper einander zu berühren anfangen, eine ebene Fläche seyn, wenn die Körper durch ebene Flächen begrenzt sind. So könnte z. E. ein Würfel mit seiner Seitenfläche an die Seitenfläche eines andern anstossen. Alsdenn ist dies selbst die Berührungs-Ebene; und der Stoß ist ein grader und centraler Stoß, wenn beyder Körper Schwerpuncte sich in einer und eben derselben graden Linie bewegen, die zugleich auf der Ebene, worin die Körper einander zu berühren anfangen, senkrecht ist. So bald nun bey einem solchen centralen Stosse die Berührung erfolgt, wird der vordere Körper B, der entweder langsamer, als der andre A geht, oder überall ruhet, anfangen, der Bewegung des andern A zu widerstehen: und es ist so viel, als wenn eine Kraft P an dem Schwerpunct A dieses letztern angebracht wäre, die demselben entgegen drückte.

228 §.

228 §.

Dafern es keine vollkommen feste oder harte Körper in der Natur giebt; so werden bey dem Stoß eines Körpers an den andern die Theile beyder Körper etwas nachgeben, so daß während des Stosses die Schwerpuncte beyder Körper einander etwas näher rücken, als um ihren Abstand im ersten Augenblick der Berührung. So kommen die Mittelpuncte zweyer nicht vollkommen harter Kugeln während des Stosses einander um etwas näher, als um die Summe ihrer Halbmesser. Nachdem die Körper mehr oder weniger hart sind, nachdem ist dieser Eindruck, den beyde Körper auf einander machen, geringer oder grösser. In jedem Fall wird dieser Eindruck seine gewissen Grenzen haben, und der Abstand der Schwerpuncte wird nur bis auf eine bestimmte Grösse abnehmen. In dem Augenblick, da dieser Abstand der Schwerpuncte am kleinsten ist, wird zugleich der Eindruck, den die Körper auf einander machen, am grösten seyn: und wenn die Körper nicht elastisch sind, so hört in diesem Augenblick die Würkung des Stosses völlig auf. Sind aber die Körper elastisch; so streben die aus ihrer Lage gebrachten Theile von diesem Augenblick an wieder in die vorige Lage zu kommen, und dies verursacht, daß jeder Körper fortfährt, den andern von sich wegzutreiben, so lange, bis beyde Schwerpuncte wieder so weit von einander entfernt sind, als sie im Augenblick der ersten Bewegung von einander entfernt waren.

229 §.

Wenn demnach ein paar nicht vollkommen harte Körper an einander stossen; so wird während des

Stos-

Stosses eine gewisse Zeit vergehen. In jedem Augenblick dieser Zeit werden beyde Körper mit einer gewissen Gewalt gegen einander drücken. So stark der eine A den andern B drückt, eben so stark wird B gegen A drücken. Die Grösse dieses Drucks wird nicht während der ganzen Zeit des Stosses einerley seyn; sondern nach und nach Aenderungen leiden. Wäre also das Gesetz bekannt, nach welchem die Aenderung dieses Drucks erfolget; könnte man ihn durch eine Function der vom Anfang des Stosses zurückgelegten Zeit, oder des von dem Schwerpunct eines jeden Körpers zurückgelegten Weges, ausdrücken: so liessen sich die Aenderungen, welche während des Stosses mit den Bewegungen beyder Körper vorgehen, durch Hülfe der allgemeinen Gleichungen des 112 § berechnen. Uebrigens erhellet, daß der Stoß die Geschwindigkeit des vorhergehenden Körpers vermehren, die Geschwindigkeit des nachfolgenden aber vermindern werde. Daher werden einmahl beyde Geschwindigkeiten gleich werden, und in eben dem Augenblick, da dies erfolgt, hört die ganze Würkung des Stosses bey unelastischen Körpern auf; und beyde Körper setzen mit eben dieser Geschwindigkeit ihre Bewegung fort, ohne daß sie weiter einigen Eindruck auf einander machen können. Sind aber die Körper vollkommen elastisch; so strebt jeder von diesem Augenblick an, seine vorige Gestalt wieder anzunehmen: der vorhergehende Körper vermindert die Geschwindigkeit des nachfolgenden; der letzte aber vermehrt die Geschwindigkeit des erstern noch mehr, und zwar so lange, bis beyde ihre vorige Gestalt völlig wieder angenommen haben.

230 §.

184 Die Massen *M* und *N* zweener nicht vollFig. kommen harter Körper, deren Schwerpuncte *A* und *B* sich beyde nach der Richtung *AC* bewegen, und ihre Geschwindigkeiten *a* und *b* im Anfang des Stosses sind gegeben: man sucht die Geschwindigkeiten beyder Körper am Ende des Stosses, vorausgesetzt, daß sie grade und central an einander stossen.

Aufl. Der Abstand AB beyder Schwerpuncte im Anfange des Stosses sey $= f$; und nach verflossener Zeit t sey $ab =$ PQ dieser Abstand, und PQ $= f - x$: so ist x dasjenige Stück, um welches die Schwerpuncte während der Zeit t sich einander genähert haben. Am Ende dieser Zeit t sey der Masse M Geschwindigkeit $= v$, und der Masse N Geschwindigkeit $= u$, die Gewalt, welche der Bewegung der Masse M widersteht, $=$ P. Nun hat man

aus dem 112 § die Gleichungen $dv = -\frac{2gP}{M}dt$,

und $du = \frac{2gP}{N}dt$; also $N\,du = 2gP\,dt = -M\,dv$,

und $M\,dv + N\,du = 0$. Hieraus folgt durch die Integration $Mv + Nu =$ einer beständigen Grösse E. Aber im Anfang des Stosses wird $v = a$, und $u = b$; also ist $Ma + Nb = E$, und $Mv + Nu = Ma + Nb$. Diese Gleichung ist bey unelastischen Körpern hinlänglich, die gegenwärtige Aufgabe aufzulösen. Denn der Stoß ist zu Ende, wenn $v = u$ ist (229 §); also setze man $v = u$, und man erhält für die Geschwindigkeit beyder Körper am Ende des Stosses

$v =$

$$v = u = \frac{Ma + Nb}{M+N} = a - \frac{N(a-b)}{M+N} = b + \frac{M(a-b)}{M+N}.$$

Wenn beyde Körper vollkommen elastisch sind: so können beyde Geschwindigkeiten am Ende des Stoßes nicht gleich groß seyn (229 §). Also muß man noch eine Gleichung zwischen v und u suchen. Zu dem Ende setze man den Weg Weg Aa, um welchen M in der Zeit t vorwärts gerückt ist, $= r$, und den Weg Bb, um welchen N in eben der Zeit vorwärts rückt, $= s$: so giebt die zwote Aufgabe des 112 §. folgende Gleichungen $2Mvdv = -4gPdr$, und $2Nudu = 4gPds$. Beyde addirt, geben $2Mvdv + 2Nudu = 4gP(ds-dr)$. Nun ist $PQ = f + s - r = f - x$; also $ds - dr = -dx$; folglich wird $2Mvdv + 2Nudu = 4gPdx$, und man erhält durch die Integration $Mvv + Nuu = C - 4g\int Pdx$. Nun mag P von x, wie man will, abhängen: so kann man doch allemahl das Integral $\int Pdx$ so nehmen, daß es für $x = o$ auch $= o$ wird. Vorausgesetzt, daß $\int Pdx$ so genommen sey, läst sich die beständige Grösse C so bestimmen. Wenn $x = o$ ist: so ist $v = a$, und $u = b$. Also wird $Maa + Nbb = C$, und $Mvv + Nuu = Maa + Nbb - 4g\int Pdx$; oder $M(aa-vv) + N(bb-uu) = 4g\int Pdx$. Bey vollkommen elastischen Körpern aber, die ihre Geschwindigkeit völlig wieder annehmen, ist alle Würkung des Stosses zu Ende, wenn der Abstand der Schwerpuncte wieder $PQ = f = AB$, also $x = o$ ist. Dies giebt $\int Pdx = o$, und $Maa + Nbb = Mvv + Nuu$; oder $M(aa-vv) + N(bb-uu) = o$. Die vorhin gefun-

dene Gleichung $Mv+Nu=Ma+Nb$, läßt sich so ausdrücken $M(a-v)+N(b-u)=0$, und wenn man hiemit die zuletzt gefundene dividirt: so erhält man

$a+v=b+u$, und $u=a-b+v$,

folglich $M(a-v)+N(2b-a-v)=0$,

und $Ma-Mv+2bN-Na-Nv=0$,

also I) $v=\frac{Ma+2bN-Na}{M+N}=a-\frac{2N(a-b)}{M+N}$

und $u=2a-b+\frac{2N(b-a)}{M+N}=\frac{2Ma-Mb+Nb}{M+N}$

oder II) $u=b+\frac{2M(a-b)}{M+N}$.

Vergleicht man diese Werthe von v und u mit den vorigen, welche für unelastische Körper gefunden sind: so ergiebt sich, daß die elastische Masse M doppelt so viel Geschwindigkeit verliere, und N doppelt so viel gewinne, als in dem Fall, wenn beyde Massen unelastisch wären.

231 §.

Diese allgemeinen Gleichungen lassen sich nun ohne alle Schwürigkeit auf besondre Fälle anwenden; und dahin gehören vornemlich folgende:

Wenn B, vor dem Stoß ruhet, so hat man $b=0$;

also für unelastische Körper $v=u=\frac{Ma}{M+N}$,

für elastische aber $v=a-\frac{2Na}{M+N}$, und $u=\frac{2Ma}{M+N}$. Sind überdem beyde Massen gleich; so

ist

so ist für unelastische Körper $v = u = \frac{1}{2}a$: für elastische aber $v = 0$, und $u = a$. Also theilt der elastische Körper dem andern seine ganze Geschwindigkeit mit, und bleibt selbst in Ruhe.

Wenn B nicht vorwärts nach C zu, sondern rückwärts dem Körper A entgegen gehet: so ist b negativ, und man hat für unelastische Körper

$$v = u = \frac{Ma - Nb}{M+N} = a - \frac{N(a+b)}{M+N} = \frac{M(a+b)}{M+N} - b;$$

für elastische aber $v = a - \frac{2N(a+b)}{M+N}$, und

$$u = \frac{2M(a+b)}{M+N} - b.$$

Sind überdem beyde Massen gleich: so gehen unelastische Körper nach dem Stosse mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(a-b)$ fort; oder bleiben völlig in Ruhe, wenn $a = b$ ist. Bey elastischen Körpern aber wird $v = -b$, und $u = a$; also verwechseln sich hier die Geschwindigkeiten: A springt zurück mit der Geschwindigkeit, die B vor dem Stoß hatte, und B bekömmt die Geschwindigkeit, womit A anstieß.

Sind also auch beyde Geschwindigkeiten vor dem Stosse gleich: so springt jeder Körper mit eben der Geschwindigkeit zurück, womit er anstieß.

Weil $a-b$ die relative Geschwindigkeit der Masse M gegen N ist (187 §): so erhellet, daß die Aenderung der Geschwindigkeit in allen Fällen so groß sey, als wenn N ruhete, M aber mit seiner relativen Geschwindigkeit an N anstiesse.

232 §.

Aus der für elastische Körper gefundenen Gleichung $a+v=b+u$, folgt $a-b=u-v$; oder $a-b=-(v-u)$. Demnach ist die relative Geschwindigkeit elastischer Körper vor und nach dem Stosse einerley, nur daß eine der andern entgegen gesetzt ist. Vor dem Stoß näherte sich M der Masse N, und nach dem Stoß entfernt sich M wieder von N.

In allen Fällen ist die Geschwindigkeit des Schwerpuncts der Massen M und $N = \frac{Ma+Nb}{M+N}$; und nach dem Stoß ist diese Geschwindigkeit des Schwerpuncts $= \frac{Mv+Nu}{M+N}$, (195 §) eben so groß, als vorhin, weil $Mv+Nu=Ma+Nb$ (230 §). Wenn also b negativ ist, und die Massen mit solchen Geschwindigkeiten einander entgegen gehen, die sich umgekehrt, wie die Massen verhalten; so bleibt der Schwerpunct in Ruhe. Ist nemlich k die Geschwindigkeit des Schwerpuncts: so wird in dem eben erwähnten Fall $k = \frac{Ma-Nb}{M+N} = 0$.

Dafern nun beyde Körper elastisch sind: so wird in eben diesem Fall $v=-a$, $u=b$, und die Körper springen mit gleichen Bewegungen zurück. Wenn aber unelastische Körper einander mit solchen Geschwindigkeiten entgegen gehen, die sich umgekehrt, wie die Massen der Körper verhalten: so bleiben beyde Körper nach dem Stoß in Ruhe, weil in diesem Fall $Ma-Nb=0$; also $v=u=0$ wird. Ein besonderer Fall davon war

im vor. §, wenn $M = N$, und $a = b$ ist. Dieser Uebergang aus dem Zustande der Bewegung in den Zustand der Ruhe, erfolgt bey unvollkommen harten und unelastischen Körpern, wie die bisherige Ausführung ergiebt, allemahl in einer gewissen obgleich sehr kleinen Zeit. Weil die allgemeine Gleichung $Mv + Nu = Ma + Nb$ auch für alle elastische Körper gilt; so erhellet, daß eben diese Körper gleichfalls in dem letzten Augenblick der Zusammenpressung ruhen, wenn $Ma - Nb = o$, oder $M : N = b : a$ ist. Die Bewegung, womit sie nach dem Stosse fortgehen, ist eigentlich eine Würkung der Federkraft.

Eben diese Sätze lassen sich so ausdrücken. Wenn zweene Körper mit gleichen Bewegungen (57 §) grade und central gegen einander stossen: so heben diese Bewegungen einander auf: und wenn die Körper elastisch sind, so werden diese Bewegungen durch die Federkraft wiederhergestellt.

233 §.

Wenn die Schlüsse des 57 § auf keine besondre Art der Körper eingeschränkt sind, sondern ihre Richtigkeit auch alsdenn behalten, wenn von vollkommen harten Körpern die Rede ist: so werden auch die Bewegungen vollkommen harter Körper gleich groß seyn, wenn sich ihre Massen M und m verkehrt, wie ihre Geschwindigkeiten C und c verhalten; oder wenn $M . C = m . c$ ist.

Es läst sich hieraus die Folge ziehen, daß der letzte Satz des 232 §, auch für vollkommen harte Körper wahr sey. Wenn dergleichen Körper mit gleichen Bewegungen einander entgegengehen: so heben beyde Bewegungen einander auf, und

und es müssen beyde Körper in dem Augenblick des Stosses in Ruhe kommen. In dem besondern Fall ist der Satz evident, wenn beyde Massen und Geschwindigkeiten gleich sind. Ist nun M $= 2m$; und $c = 2C$: so hat jede Hälfte von M die Geschwindigkeit $C = \frac{1}{2}c$, und die Bewegung jeder Helften von M hält die Masse m, mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ auf. Also hält die Masse m mit der Geschwindigkeit $2 \times \frac{1}{2}c = c$ beyde Massen $\frac{1}{2}$M zusammen, jede mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ auf. Ueberhaupt, wenn $M = k.m$, und $C = k.c$ ist; so wird die Bewegung eines jeden Theils $\frac{1}{k}$M der Masse M von der andern Masse m mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{k}c$ aufgehalten. So erläutert Hr. d'Alembert diesen Satz: (Traitè de Dynamique p. 37.38.) und weil diese Schlüsse nichts voraussetzen, was die Sache auf die eine, oder die andre Art der Körper einschränkte: so läst sich dieser Satz allgemein dadurch rechtfertigen, auch ohne die Gesetze des Stosses schon als bekannt vorauszusetzen.

234 §.

Diese Veränderung des Zustandes der Bewegung in den Zustand der Ruhe müste nun bey vollkommen harten Körpern plötzlich geschehen; ohne daß diese Veränderung in einer gewissen, auch noch so kleinen Zeit vorgehen könnte. Unter den uns bekannten Körpern giebt es vermöge der Erfahrung solche nicht, die vollkommen hart sind. Ob es aber dergleichen Körper gar nicht geben könne, und ob nicht wenigstens die kleinsten Bestandtheile der Körper vollkommen

men harte Massen seyn; ist eine Frage, die sich wohl schwerlich aus dem Grunde verneinen läst, der gewöhnlich gebraucht wird, dergleichen vollkommen harte Körper aus der Natur zu verbannen.

235 §.

Man stellet sich nemlich in der theoretischen Mathematik (41 §. A. R.) alle Veränderungen, die mit einer Grösse, indem sie wächst, oder abnimmt, vorgehen, als solche vor, die nicht plötzlich geschehen. Eine Grösse A, z. E. die bis auf ihre Hälfte abnimt, muß ehe und bevor sie bis auf die Hälfte abnehmen kann, bis auf $\frac{3}{4}$ A, und ehe sie bis auf $\frac{3}{4}$ A, abnehmen kann, bis auf $\frac{7}{8}$ A abgenommen haben. Kurz, bevor $\frac{1}{2}$ A aus A werden kann, müssen aus A nach und nach alle Werthe geworden seyn, die zwischen A und $\frac{1}{2}$ A fallen. Man nennt diese Regel: das Gesetz der Stetigkeit, und verschiedene Naturlehrer haben diese Regel als ein allgemeines Naturgesetz angenommen. Es soll vermöge desselben keine Veränderung in der Natur plötzlich geschehen. Wenn ein bestimmter Zustand auf den andern folgt: so kann der folgende Zustand nicht zur Würklichkeit kommen, bevor alle Veränderungen vorgegangen sind, die sich zwischen dem vorhergehenden und nachfolgenden Zustande denken lassen. So kann z. E. ein Körper nicht plötzlich aus einem Orte nach dem andern kommen. Er muß entweder in einem graden, oder wie man will, gekrümmten und gebrochenen Wege, von einem Orte zum andern gehen. Bevor er von dem Anfang dieses Weges bis zu dessen Ende gelangen kann, muß er in allen Oertern gewesen seyn, die in diesem

We-

Wege zwischen den beyden äussersten liegen. In soweit gilt also das Gesetz der Stetigkeit bey allen Bewegungen, die in der Natur vorgehen. Soll ein Körper den ganzen Weg s zurücklegen; so muß er vorher den Weg $\frac{1}{2}s$, und wiederum vorher den Weg $\frac{1}{4}s$, u. s. f. zurücklegen. Wenn man sich den Körper als einen Punct, und seinen Weg, als eine Linie vorstellt; so heist dies so viel: der Körper kann nicht von dem einen Endpuncte seines Weges bis zum andern kommen, bevor er in allen Puncten gewesen ist, die man zwischen den beyden äussersten annehmen kann.

236 §.

So ändert demnach ein Körper seinen Ort nie plötzlich. Aber daraus läst sich schwerlich schliessen, daß die übrigen Umstände, welche man in der Mechanik bey der Bewegung unterscheidet, sich gleichfalls nicht plötzlich ändern könnten. Ein Punct, der in einer krummen Linie, ohne Rückkehrpuncte fortgeht, ändert seine Richtung nach dem Gesetz der Stetigkeit: wenn er aber im Umfange einer gradlinichten Figur herumgehet; so ändert er seine Richtung in allen Winkelpuncten plötzlich. Man kann schwerlich beweisen, daß eine solche Bewegung unmöglich sey; und eben so wenig wird man die Unmöglichkeit einer plötzlichen Aenderung der Geschwindigkeit beweisen können. Richtung und Geschwindigkeit können sich plötzlich ändern, ohne daß deswegen die Aenderung des Orts vom Gesetze der Stetigkeit abweiche.

Man vergleiche hiemit des H. Hofr. Käſtners Dissert. de Lege continui in natura Lipſ. 1750, imgleichen seine Anfangsgründe der höhern Mechanik III Abschn. 183-196 §.

237 §.

237 §.

Man kann also die Unmöglichkeit vollkommen harter Massen aus dem Grunde nicht beweisen, weil beym Stosse solcher Massen gegen einander die Aenderung der Geschwindigkeit nicht nach dem Gesetz der Stetigkeit erfolget (234 §); und so lange ihre Unmöglichkeit nicht aus andern Gründen erwiesen ist, bedarf es noch einer besondern Untersuchung, nach welchen Gesetzen die Bewegung vollkommen harter Körper durch den Stoß geändert werden. Die Gesetze dieses Stosses müssen besonders bewiesen werden, und lassen sich aus dem 230 §. nicht herleiten, weil die dort gebrauchten, aus dem 112 § genommenen Gleichungen voraussetzen, daß während des Stosses eine gewisse Zeit verfliesse, und die Aenderung der Geschwindigkeit nach dem Gesetz der Stetigkeit erfolge. Nur in diesem Fall hat Hr. d'Alembert Recht, wenn er im 19. und 127 §. seiner Dynamique behauptet, die allgemeine Gleichung der Mechanik $dc = \frac{2gPdt}{M}$ (112 §) lasse sich bey Bestimmung der Gesetze des Stosses nicht gebrauchen, und der daselbst von ihm gebrauchte Grund setzet die Sache nicht in ihr gehöriges Licht: wie er denn auch selbst diese Gleichung bey Bestimmung der Gesetze des Stosses elastischer Körper im 147 und f. §, anwendet.

238 §.

Die Gesetze des Stosses vollkommen harter Massen sind einerley mit den Gesetzen des Stosses unvollkommen harter und unelastischer Körper.

Beweis. Die vollkömmen harte Masse M stosse an eine andre ruhende ebenfalls vollkommen harte Masse N, und der Masse M Geschwindigkeit vor dem Stosse sey $= a$: so ist die Grösse ihrer Bewegung $= Ma$. Der Stoß selbst sey ein grader und centraler Stoß. In dem Augenblick nun, da die Massen einander berühren, widerstehet N der Bewegung der Masse M, und deswegen wird die Bewegung der letztern Masse in diesem Augenblick vermindert. So stark aber die Masse N in diesem Augenblick der Masse M entgegen drückt, eben so stark drückt M die Masse N, und theilt ihr deswegen eine Bewegung mit, die so groß seyn muß, als der Theil, den sie selbst verliert. Nun sey $a - x$ der Masse M, z aber der Masse N Geschwindigkeit nach dem Stosse; so ist die Bewegung, welche M verliert, $= Mx$, diejenige aber, welche der Masse N mitgetheilt wird $= Nz$, und es muß $Mx = Nz$ seyn. Nun widerstehet N der Masse M nur aus dem Grunde, weil dieser ihre Geschwindigkeit der Masse N Geschwindigkeit übertrift, und so bald beyder Massen Geschwindigkeiten gleich sind, hört der Widerstand auf. Deswegen muß nach dem Stosse $a - x = z$ seyn. Dies giebt $x = a - z$; also wird $Ma - Mz = Nz$, und $z = \frac{Ma}{M+N}$, also $x = \frac{Na}{M+N}$.

Dafern die Masse N nicht, wie bisher vorausgesetzt ist, in Ruhe gewesen; sondern vor dem Stosse schon mit der Geschwindigkeit b nach eben der Richtung, wie M fortgegangen wäre: so hätte man Ma und Nb für die Grösse der Bewegungen beyder Massen vor dem Stosse. Wenn nun M den Theil Mx von seiner Bewegung verliehrt: so muß N einen

Theil

Theil Nz gewinnen, und es muß $Mx = Nz$ seyn. Nach dem Stosse also sind $Ma - Mx$, und $Nb + Nz$ die Bewegungen, so, wie $a - x$ und $b + z$ die Geschwindigkeiten der Massen M und N. Es muß aber nach dem Stosse $a - x = b + z$ seyn. Daher ist $x = a - b - z$, und $Ma - Mb - Mz = Nz$, folglich $z = \frac{M(a-b)}{M+N}$, und $b + z = \frac{Ma+Nb}{M+N}$.

Dafern endlich die Massen M und N mit den Geschwindigkeiten a und b gegen einander laufen: so drücken Ma und Nb die Grösse der Bewegungen beyder Massen vor dem Stosse aus: nur sind beyde einander entgegengesetzt, weil hier offenbar eine jede die andre vermindert. Deswegen darf man in dem Ausdruck, der für den vorigen Fall gefunden ist, nur $-b$ statt $+b$ schreiben: so ist derselbige auf den gegenwärtigen gebracht. Man kann sich aber eben die Sache auch so vorstellen. Wenn M durch den Stoß einen Theil $= Mx$ seiner Bewegung verliert: so wird dagegen der Masse N eine Bewegung $= Nz$ mitgetheilt, die ihrer vorigen Bewegung Nb entgegengesetzt ist, und es muß $Mx = Nz$ seyn. Daher sind nach dem Stosse die Bewegungen $Ma - Mx$, und $Nz - Nb$ beyde nach einerley Richtung genommen, so wie $a - x$ und $z - b$ die Geschwindigkeiten nach eben dieser Richtung sind. Es muß aber $a - x = z - b$ seyn. Also wird $x = a + b - z$; und $Ma + Mb - Mz = Nz$; folglich $z = \frac{M(a+b)}{M+N}$ und $z - b = \frac{Ma-Nb}{M+N}$.

Wenn demnach überhaupt die Geschwindigkeit

nach dem Stosse $= u$ gesetzt wird: so kann der Ausdruck $u = \frac{Ma + Nb}{M+N}$ allgemein gebraucht werden, da dann b das entgegengesetzte Zeichen bekommt, wenn beyde Massen gegen einander laufen, und $b = 0$ gesetzt werden muß, wenn N vor dem Stosse ruhet. Eben dieser allgemeine Ausdruck aber ward im 184§ für die unvollkommen harten, unelastischen Körper gefunden.

Folgen die Körper einander: so gewinnt N die Geschwindigkeit $z = \frac{M(a-b)}{M+N}$, und M verliert die Geschwindigkeit $x = a - b - \frac{M(a-b)}{M+N} = \frac{N(a-b)}{M+N}$. Laufen die Massen gegen einander: so gewinnet N die Geschwindigkeit $z = \frac{M(a+b)}{M+N}$, und M verliert die Geschwindigkeit $x = a + b - z = \frac{N(a+b)}{M+N}$. Daher ändert sich die Bewegung in beyden Fällen so, als wenn N ruhete, und in jenem Falle M mit der Differenz der Geschwindigkeiten; in diesem Falle aber mit der Summe der Geschwindigkeiten an N anstiesse. Die Summe im letzten Falle ist die Differenz beyder Geschwindigkeiten, wenn eine in Absicht der andern als negativ betrachtet wird, (13§. A. R.) und es ist überhaupt $a - b$ die relative Geschwindigkeit der Masse M gegen N.

239 §.

In die Schlüsse des vor. § hat der Umstand gar keinen Einfluß, ob während des Stosses eine gewisse Zeit vergehet, oder ob die Aenderung der Bewegung im Moment der ersten Berührung plötzlich erfolget. Alles kommt auf die beyden Umstände an, daß der eine Körper vermittelst des Stosses dem andern so viel Bewegung nach der Richtung des ersten genommen mittheilt, als der letzte dem ersten entziehet; und daß die Würkung des Stosses zu Ende sey, wenn beyde Geschwindigkeiten gleich sind. Nun mag während des Stosses eine gewisse Zeit vergehen, oder nicht: so wird hiedurch in jenen beyden Voraussetzungen nichts geändert, und allein auf diese gründet sich die Gleichung $u = \frac{Ma+Nb}{M+N}$. Daher hätten die Gesetze des Stosses unelastischer Körper überhaupt, so wie im vor. §, erwiesen werden können, ohne daß es nöthig gewesen wäre, sie aus der allgemeinen Gleichung $dt = \frac{2gP}{M} dt$, vermittelst der Integralrechnung herzuleiten, wenn dies letztere nicht deswegen geschehen wäre, um dieser Untersuchung eine grössere Allgemeinheit zu geben. Wegen eben dieser Ursache sind im 230 § die Gesetze des Stosses elastischer Körper aus der allgemeinen Gleichung $dc = \frac{2gP}{M} dt$ hergeleitet worden, die sich sonst auch auf folgende Art erweisen lassen.

Wenn ein paar vollkommen elastische Massen an einander stossen: so ändert sich vom ersten Augenblick der Berührung, bis zum Moment der grösten

Zu-

Zusammenpressung, die Bewegung eben so, als wenn beyde Körper unelastisch wären: und von diesem Augenblick der grösten Zusammenpressung, bis zum Moment der letzten Berührung, stellen beyde Körper ihre Gestalt wieder her. Aber in gleichen Entfernungen ihrer Schwerpuncte, vor und nach der grösten Zusammenpressung, drücken die Massen mit gleicher Stärke gegen einander, nur daß in umgekehrter Ordnung dieser Druck wieder abnimmt, je weiter sich die Schwerpuncte von einander entfernen, bis im Augenblick der letzten Berührung aller Druck aufhört. Also muß dieser Druck vom Moment der grösten Zusammenpressung, bis zum Moment der letzten Berührung, der Masse M eben so viel Geschwindigkeit nehmen, als sie schon vom Moment der ersten Berührung, bis zur grösten Zusammenpressung verlohren hatte: und eben dieser Druck muß der Masse N vom Moment der grösten Zusammenpressung, bis zum Moment der letzten Berührung, eben so viel Geschwindigkeit zusetzen, als sie schon vom Moment der ersten Berührung, bis zur grösten Zusammenpressung gewonnen hatte. Daher verliert M nochmahl so viel, und N gewinnt nochmahl so viel Geschwindigkeit, als wenn beyde Körper elastisch wären; und es ist nach dem Stoß die Geschwindigkeit der Masse $M = a - \frac{2N(a-b)}{M+N}$, und der Masse N Geschwindigkeit $= b + \frac{2M(a-b)}{M+N}$, wie im 206 §.

240 §.

Ist also nach dem Stosse v der Masse M, und u der Masse N Geschwindigkeit: so kan man überhaupt

$v = a -$

$$v = a - \frac{\lambda N(a-b)}{M+N},$$

$$u = b + \frac{\lambda M(a-b)}{M+N}$$

setzen, da dann $\lambda = 1$, oder $= 2$ seyn muß, nachdem entweder von unelastischen, oder vollkommen elastischen Massen die Rede ist. Ja diese Ausdrücke lassen sich auch für unvollkommen elastische Körper brauchen. Da dergleichen Massen ihre Gestalt nicht völlig herstellen; so wird auch die Aenderung der Geschwindigkeit nicht doppelt so viel, als bey gänzlich unelastischen Massen betragen. In der That sind die Fälle, wo $\lambda = 1$, oder $\lambda = 2$ seyn muß, nur die beyden äussersten, die überhaupt statt haben können, und in den allermeisten Fällen wird λ einen Werth haben müssen, der zwischen den Grenzen 1 und 2 enthalten ist. **Wallis** erfand die Gesetze des Stosses unelastischer Körper: **Huygen** und **Wrenn** aber die Gesetze des Stosses vollkommen elastischer Körper. Wenn man bey jeder Art von Körpern das Gesetz angeben könnte, nach welchem sich der Druck beyder Körper gegen einander während des Stosses ändert: so könnte man aus den allgemeinen Formuln des 230 § in jedem solchen Fall die Aenderung der Geschwindigkeit herleiten. Wäre z. E. bey einer gewissen Art von Körpern die Aenderung, welche von der Federkraft herrührt, nur halb so groß, als sie bey vollkommen elastischen Körpern seyn müste: so wäre $\lambda = \frac{3}{2}$. Man sehe Hrn. von Segners Einleitung in die Naturlehre 560 §. Es hat aber diese Untersuchung in der Anwendung ihre grossen Schwürigkeiten, und man muß sich sehr

in Acht nehmen, die Gesetze des Stosses unelastischer Körper nicht so schlechthin da anzuwenden, wo Körper, die man gemeiniglich in die Classe unelastischer setzt, wie z. E. bleyerne Kugeln an harte Körper anschlagen. Vielleicht sind die kleinsten Theilchen solcher Körper elastisch; und wenn dies ist: so wird auch der ganze aus solchen Theilen zusammengesetzte Körper mehr, oder weniger Elasticität äussern, nachdem er mit mehr, oder weniger Geschwindigkeit anschlägt. Die Untersuchung hierüber ist für die Ausübung sehr interessant, wie bey fernerer Anwendung der Mechanik auf andre besondere Theile der practischen Mathematik erhellen wird. Die blosse Theorie aber ist hier unzulänglich, und es fehlt noch an hieher gehörigen Versuchen. Man s. hievon Hrn. Lamberts Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers, und den Widerstand der Luft, im 24-27 §.

241 §.

185 Fig. Es sind *B* und *C* ein paar elastische Körper, deren Schwerpuncte in der graden Linie *MN* ruhig liegen; beyde berühren einander in *c* so, daß die Berührungs-Ebene durch *c* auf *MN* senkrecht ist: eines dritten Körpers *A* Schwerpunct bewegt sich in derselben graden Linie *MN*, und der elastische Körper *A* stößt an *B* grade und central, mit der Geschwindigkeit *a*, nach der Richtung *AN*: man soll die Geschwindigkeit finden, welche dem Körper *C* hiedurch mitgetheilt wird.

Aufl. Der Körper A theilt dem Körper B die Geschwindigkeit $\frac{2A.a}{A+B}$ mit; und wenn man diese

se $= k$ setzt: so erhellet, daß B dem C die Geschwindigkeit $\frac{2B.k}{B+C} = \frac{2B}{B+C} \cdot \frac{2A.a}{A+B}$ mittheile. Also wird die gesuchte Geschwindigkeit

$$= \frac{4A.B.a}{A.B+A.C+B.C+B^2} = \frac{4A.a}{A+B+C+\frac{A.C}{B}}.$$

Wenn A unmittelbar an C angestossen hätte: so wäre dem C die Geschwindigkeit $\frac{2A.a}{A+C}$ mitgetheilt. Diese von jener abgezogen, giebt den Unterscheid $\left(\frac{2B}{(B+C)(A+B)} - \frac{1}{A+C}\right) 2A.a =$

$$\frac{A.B+B.C-A.C-B^2}{(B+C)(A+B)(A+C)} \cdot 2A.a = \left(\frac{C-B}{B+C}\right)$$

$$\frac{(A-B)(B-C).2A.a}{(B+C)(A+B)(A+C)}.$$ Dieser Ausdruck ist positiv, wenn die Grösse der Masse B zwischen A und C fällt. Folglich ist in diesem Fall allemahl die dem Körper C vermittelst des mittlern Körpers B mitgetheilte Geschwindigkeit grösser, als wenn C unmittelbar von A bewegt würde. Sind aber alle drey Körper gleich groß: so ist diese Geschwindigkeit in beyden Fällen einerley.

242 §.

Die mittelbar mitgetheilte Geschwindigkeit war $\frac{4A.a}{A+B+C+\frac{A.C}{B}}$. Diese wird $= \frac{4.A.a}{A+2B+C}$,

wenn $\frac{A.C}{B} = B$, oder $A.C = B^2$, folglich B zwischen A und C die mittlere geometrische Proportional-Grösse ist; also die drey Massen A, B, C, in geometrischer Progreßion fortgehen. In eben diesem Fall sind auch die Geschwindigkeiten in geometrischer Progreßion. Es sey nemlich $\frac{B}{A} = \frac{C}{B} = n$: so ist $B = nA$, $C = nB = n^2A$. Nun würde A dem B die Geschwindigkeit $\frac{2A.a}{A+B} = \frac{2}{1+n}.a$ mittheilen, und die vermittelst B dem Körper C mitgetheilte Geschwindigkeit wäre $\frac{2B}{B+C} \cdot \frac{2A.a}{A+B} =$

$\left(\frac{2}{1+n}\right)^2.a$

Wenn die Schwerpuncte mehrer, als zweyer Körper, sich so wie im vor. § in grader Linie befinden; die Massen aber in geometrischer Progreßion fortgehen: so findet man leicht, daß die Geschwindigkeiten ebenfalls eine geometrische Progreßion ausmachen, die diesen Körpern nach der Reihe mitgetheilt werden, wenn der erste an den zweyten stößt, und dieser den ihn unmittelbar berührenden dritten, der dritte den vierten, u. s. f. in Bewegung setzt. Wenn nemlich M und N zwey nach einander folgende Körper sind, und es ist r die Anzahl der Körper, die nach dem ersten bis M folgen: so wird N der $(r+1)$te nach dem ersten seyn. Nun sey der Masse M Geschwindigkeit $= k$: so wird der Masse N Geschwindigkeit $= \frac{2M.k}{M+N}$. Machen nun die Massen A, B,

B, C, D, ... M, N, eine geometrische Progreßion aus; und ist $\frac{B}{A} = n$, also $B = nA$: so wird $M = n^r A$, und $N = n^{r+1} A$. Dies giebt der Masse N Geschwindigkeit $= \frac{2}{1+n} . k$. Ist nun $k = \left(\frac{2}{1+n}\right)^r a$: so wird der Masse N Geschwindigkeit $= \left(\frac{2}{1+n}\right)^{r+1} . a$. Hieraus erhellet, daß der Ausdruck $k = \left(\frac{2}{1+n}\right)^r . a$ allgemein sey, wenn r die Zahl ist, welche ausdrückt, wie viel Körper nach dem ersten bis zum letzten folgen.

Sind die Massen alle gleich: so sind alle Geschwindigkeiten gleich: der letzte allein, geht mit der Geschwindigkeit *a* fort, und die übrigen alle bleiben ruhig liegen.

243 §.

Wenn die Schwerpuncte der Massen M und N 186
sich nicht, wie bisher angenommen worden, in eben Fig.
derselben graden Linie bewegen; auch ihre Richtungen nicht beyde zugleich auf die Berührungs-Ebene senkrecht sind, wie in dem Falle seyn könnte, wenn beyde parallel wären: so heist der Stoß ein schiefer Stoß. Dieser schiefe Stoß ist nicht allemahl excentrisch, so wie auch der grade Stoß nicht allemahl central ist. Wenn nemlich A*a* und B*b* die Geschwindigkeiten beyder Schwerpuncte im ersten Augenblick des Stosses sind, und entweder alle beyde, oder nur eine dieser Richtungen, die Berührungs-Ebene RS,

unter

unter einem beliebigen Winkel schneiden: so muß man diese Geschwindigkeiten in zwo andre zerlegen, wovon die eine auf RS senkrecht, und die andre damit parallel ist. Nun erhellet leicht, daß die Körper nur mit den senkrechten Geschwindigkeiten an einander stossen (132 § St.). Wenn also diese senkrechten Geschwindigkeiten der Schwerpuncte in einer, und eben derselben graden Linie liegen: so ist der Stoß noch ebenfalls ein centraler Stoß. Liegen sie aber nicht in einer und eben derselben graden Linie: so ist der Stoß eccentrisch (226 §).

244 §.

186 Fig. Die Schwerpuncte *A* und *B* zwoer Massen bewegen sich in einer Ebene nach den Richtungen *Aa* und *Bb*, mit den Geschwindigkeiten *a*, *b*, und beyde Körper stossen in *K* schief, jedoch central, an einander. Die Berührungs-Ebene steht auf der Ebene *aABb* senkrecht, und beyder Durchschnitt ist *RS*. Die Winkel $aAB = \alpha$, und $bBA = \beta$, sind gegeben: man soll die Richtung und Geschwindigkeit beyder Körper nach dem Stosse finden.

Aufl. Es sey $Aa = a$, $Bb = b$. Diese Geschwindigkeiten zerlege man nach Richtungen, die auf RS senkrecht, und mit RS parallel sind: so erhält man $AC = a \sin\alpha$; $AD = a \cos\alpha$; $BE = b \sin\beta$; $BF = b \cos\beta$. Nun erhellet, daß die Körper nur mit den Geschwindigkeiten AD und BF gegen einander stossen. Wenn also

I) beyde Körper unelastisch sind: so gehen sie nach dem Stoß mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit

keit $\frac{A.AD-B.BF}{A+B}$, nach der Richtung AB.

Wenn demnach $Ad = Bf = \frac{A.AD-B.BF}{A+B}$ gemacht ist: so entstehet aus den Geschwindigkeiten Ad und AC, die mittlere $AG = \sqrt{(AC^2+Ad^2)}$; aus BE und BF aber die mittlere $BH = \sqrt{(BE^2+Bf^2)}$. Ueberdem wird tang $GAd = \frac{AC}{Ad}$, und tang HBf $\frac{BE}{Bf}$. Wenn aber

II) beyde Körper elastisch sind: so werden nach dem Stosse ihre Geschwindigkeiten $AD - \frac{2A(AD-BF)}{A+B}$, und $-BF + \frac{2B(AD-BF)}{A+B}$.

Man muß also nun $Ad = AD - \frac{2A(AD-BF)}{A+B}$;

$Bf = -BF + \frac{2B(AD-BF)}{A+B}$, nehmen, und übrigens, wie vorhin, verfahren.

Wenn die Schwerpuncte zwoer Kugeln A und B sich in einer Ebene so bewegen, daß ein Stoß erfolgen kann: so wird derselbe allemahl ein centraler Stoß seyn; die Kugeln mögen übrigens grade, oder schief an einander laufen, und die Berührungsebene wird auf derjenigen allemahl senkrecht seyn, worin die Schwerpuncte sich bewegen; vorausgesetzt, daß die Kugeln aus einer gleichartigen Masse bestehen.

187 Fig.

245 §.

Die Mittelpuncte zwoer Kugeln *A* und *B* bewegen sich gleichförmig in einer Ebene, mit den Geschwindigkeiten $Aa = a$, und $Bb = b$. Im Anfange der Zeit *t* ist der Abstand der Schwerpuncte $AB = f$; die Winkel $BAa = \alpha$ und $ABb = \beta$. Man sucht, ob und wann die Kugeln zusammenstossen werden, imgleichen die Lage der Berührungs-Ebene.

Aufl. Man suche die relative Bewegung der einen Kugel A gegen die andre B nach dem 191 §. Zu dem Ende sey $Aa =$ und $\#$ Bb: so wird $aA\alpha = \alpha + \beta$. Man verzeichne das Parallelogramm $AaC\alpha$: so ist $AC = \sqrt{(aa - 2ab\,\mathrm{cof}(\alpha+\beta) + bb)}$ die relative Geschwindigkeit der Kugel A gegen B, und tang $aAC = \frac{b\,\mathit{sin}(\alpha+\beta)}{a - b\,\mathit{cof}(\alpha+\beta)}$. Man hat also auch BAC $= aAC - BAa$, und dieser Winkel bestimmt die Lage der scheinbaren Richtung. Mit der Summe der Halbmesser verzeichne man einen Kreis, welcher AC in D schneidet: so ist AD der relative Weg, den A zurückgelegt haben muß, bevor die Berührung erfolgen kann. Es erhellet aber zugleich, daß eine senkrechte Linie von B auf AC kleiner als AD seyn muß, dafern ein Stoß erfolgen soll. Wenn demnach *r* und ϱ die Halbmesser der Kugeln sind: so muß $f . \mathit{sin}\,BAC < r + \varrho$ seyn. Uebrigens hat man $\mathit{sin}\,ADB = \frac{AB . \mathit{sin}\,BAD}{BD}$, also ist auch $ABD = 180° - BAD - ADB$ bekannt. Ferner wird $AD = \frac{BD . \mathit{sin}\,ABD}{\mathit{sin}\,BAD}$; aber auch $AD = AC . t$. Dies

giebt $t = \frac{BD \sin ABD}{AC \sin BAD}$, als die Zeit, binnen welcher die Kugeln einander erreichen. Wenn übrigens RS durch E auf BD senkrecht ist; so wäre dies der Durchschnitt der Berührungs-Ebene mit der Ebene ABD, wenn B würklich ruhete, und A nur mit der relativen Geschwindigkeit fortgienge. Will man den wahren Ort der Berührung haben; so nimmt man $BP = b.t$, und setzt $t = \frac{BD.\sin ABD}{AC.\sin BAD}$, zieht PQ = und ♯ BE: so ist Q der wahre Ort der Berührung, und *rs* mit RS parallel gezogen, giebt die Lage der Berührungs-Ebene.

Der XVI. Abschnitt.

Vom

Stoß fester Körper an andre, die nicht ausweichen.

246 §.

Wenn ein unelastischer Körper, er mag übrigens vollkommen; oder unvollkommen hart seyn, senkrecht an die Oberfläche eines andern völlig unbeweglichen Körpers stößt: so muß er dadurch ganz in Ruhe kommen, und alle Bewegung verlieren. Es ist eben so viel, als wenn der bewegte Körper an eine ruhende unendlich grosse Masse stiesse. Wenn nem-

lich

lich des bewegten Körpers Masse M, seine Geschwindigkeit a, des ruhenden Körpers Masse N ist: so wird die Geschwindigkeit nach dem Stosse $=$ $\frac{Ma}{M+N}$; und dieser Ausdruck wird $=0$, wenn $N=\infty$ gesetzt wird. Der völlig unbewegliche Körper drückt hier dem bewegten eben so entgegen, wie ein andrer Körper thun würde, der ihm mit gleicher Bewegung entgegen stiesse (233 §).

Dafern beyde Körper, der bewegte sowohl, als der unbewegliche, vollkommen elastisch sind: so wird der bewegte Körper mit eben der Geschwindigkeit zurückspringen, womit er anstieß. Denn die Federkraft stellet die Veränderung, die er erlitten hat, völlig wieder her. Wenn die elastische Masse M an eine andre ruhende N mit der Geschwindigkeit a stößt; so wird nach dem Stosse

der Masse M Geschwindigkeit $= a - \frac{2Na}{M+N}$,

und der Masse N Geschwindigkeit $= \frac{2Ma}{M+N}$.

Jene wird $= -a$; und diese $=0$, wenn man $N=\infty$ setzt.

247 §.

188 Fig. Stößt ein unelastischer Körper, dessen Schwerpunct B ist, nach der Richtung BC, in K an die unbewegliche Fläche MN, mit der Geschwindigkeit BC: so sey BD auf MN senkrecht. Wenn nun BD durch K durchgehet, und BE mit MN parallel gezogen ist: so zerlegt sich die Geschwindigkeit BC, in die senkrechte BD, welche völlig aufgehalten wird, und die parallele BE, mit welcher der Körper seine Bewegung fortsetzen wird. Sind

Sind aber die Massen vollkommen elastisch: so springt B senkrecht mit der Geschwindigkeit $Bd = BD$ zurück, und beyde Geschwindigkeiten Bd, BE, geben die mittlere Bc, womit der anschlagende Körper nach dem Stosse fortgehet. Es wird aber $Bc = BC$, und der Winkel $EBc = EBC = ABe$. Also springt der elastische Körper mit eben der Geschwindigkeit, und unter eben dem Winkel auf der andern Seite der Normallinie zurück, womit er anstieß.

248 §.

Dafern der unbewegliche Körper, woran der andre stößt, so weich ist, daß dieser die Theile des ersten loßreissen, und vor sich herschieben kann: so wird der bewegte Körper in den unbeweglichen bis auf eine gewisse Tiefe hineindringen, wie z. E. eine Canonkugel in einen Wall von Erde hineindringt. In Fällen von dieser Art, wenn der unbewegliche Körper durchgängig einerley Festigkeit hat, wird der Widerstand, welchen der bewegte Körper leidet, beständig gleich groß seyn, und eine Kugel, die in einen erdenen Wall, oder hölzernen Bloch hineindringt, wird, nachdem sie schon bis auf eine gewisse Tiefe hinein gedrungen ist, einen eben so grossen Widerstand, als im ersten Anfange des Stosses finden. Wenn der eindringende Körper eine Kugel ist: so wird das Loch eine cylindrische Gestalt bekommen; und man siehet leicht, daß bey einerley Festigkeit des unbeweglichen Körpers, der Widerstand desto grösser seyn werde, je grösser der Querschnitt, oder die Weite dieses cylindrischen Lochs ist. Bey einer Kugel wird diese Weite dem grösten Kreise der Kugel gleich, und der Widerstand dieser Weite proportional seyn.

249 §.

Es ist die Tiefe des Lochs $= a$ gegeben, welches eine Kugel, deren Masse $= M$, und Durchmesser $= c$ ist, in einem unbeweglichen Körper verursacht, wenn sie mit der Geschwindigkeit b anschlägt: man soll die Stärke des Widerstandes finden, den die Kugel leidet.

Aufl. Wenn vom ersten Anfang des Stosses die Zeit t verflossen ist, und die Kugel in dieser Zeit t um den Weg x vorwärts gerückt, ihre Geschwindigkeit aber in diesem Augenblick $= v$, und der Widerstand $= P$ ist: so hat man $Mvdv = -2gPdx$ (112 §). Weil nun der Widerstand P unveränderlich; übrigens aber desto grösser ist, je grösser die gröste Kreisfläche der Kugel ist: so nehme man an, diese gröste Kreisfläche sey $= K$, und der Widerstand sey dem Gewichte einer Wasser-Säule gleich, deren Grundfläche $= K$, die Höhe aber $= f$ ist; und γ sey das Gewicht eines Cubikfusses Wasser: so wird $P = Kf\gamma$, und $Mvdv = -2gKf\gamma dx$. Nun ist $K = \frac{1}{4}\pi cc$ (475 §. G.), und wenn δ das Gewicht eines Cubicfusses der Masse M ist: so wird $M = \frac{2}{3}.\frac{1}{4}\pi c^3\delta = \frac{1}{6}\pi c^3\delta$ (394 §. G.) Setzt man diese Werthe statt M und K: so erhält man $2c\delta vdv = -6gf\gamma dx$, oder $2ncvdv = -6gfdx$, wenn man $\frac{\delta}{\gamma} = n$ setzt, da dann n die eigene Schwere der Masse M, in dem Verstande des 39 §. Hydrost. ist. Die Integration giebt $ncv^2 = -6gfx + C$. Weil nun $v = b$ ist, für $x = 0$: so wird $C = ncb^2$, und man erhält $ncv^2 = ncb^2 - 6gfx$. Nun fährt die Kugel fort, so lange hinein zu dringen, bis ihre

Ge-

Geschwindigkeit $v = o$ ist, und dann wird $x = a$.

Dies giebt $ncb^2 = 6afg$, und $a = \frac{ncb^2}{6fg}$. Man sehe Eulers erläuterte Artillerie 717. 718 S. wo die Eulerische Formul aus der gegenwärtigen wird, wenn man b statt bb schreibt, und $g = \frac{1}{4}$ setzt (117 §).

Wenn also a gegeben ist: so erhält man $f = \frac{ncb^2}{6ag}$, und daraus kann man $P = Kf\gamma$ berechnen.

250 §.

Wenn einerley Kugel mit einerley Geschwindigkeit gegen unbewegliche Massen von verschiedener Festigkeit stößt: so verhält sich der Widerstand wie die Höhe f der Wasser-Säule, deren Gewicht dem Widerstande gleich ist: daher läst sich auf diese Art die Festigkeit verschiedener Massen vergleichen. Diese wird nemlich der Stärke des Widerstandes proportional seyn, den sie einerley Kugel, die mit einerley Geschwindigkeit anstößt, entgegensetzen. In einen andern Wall, oder Bloch, dringe eben die Kugel mit eben der Geschwindigkeit, um die Tiefe $= A$ ein, und die Höhe der Wassersäule, deren Gewicht dem Widerstande gleich ist, sey $= F$: so wird $F = \frac{ncb^2}{6Ag}$, und $f : F = \frac{1}{a} : \frac{1}{A}$. Daher verhalten sich die Festigkeiten umgekehrt, wie die Tiefe der Löcher, um welche einerley Kugel eindringt, wenn sie mit einerley Geschwindigkeit anstößt. Wäre aber der andern Kugel Durchmesser $= C$, ihre Geschwindigkeit $= B$, ihre eigene Schwere $= N$, wenn

die eigene Schwere des Wassers = 1 ist: so erhielte man $f : F = \frac{ncb^2}{a} : \frac{N.C.B^2}{A}$.

251 §.

Robin hat eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Engl. Zollen im Durchmesser gegen einen Bloch aus Ulmen-Bäumenholz geschossen; ihre Geschwindigkeit war 1700 Engl. Fuß $= b$, und sie drang 5 Zoll tief ein. Es ist aber $g = 16,1$ Engl. Fuß (181 §), und die eigene Schwere des Bleyes $= 11,35 = n$ (46 §. Hydr.). Setzt man also $c = \frac{3}{4}$ Zoll $= 0,0625$ F. und $a = 5$ Zoll $= 0,4166$ Fuß: so findet man

$$f = \frac{11,35 \times 0,0625 \times 1700^2}{6 \times 16,1 \times 0,4166}, \text{ oder}$$

$$f = \frac{4 \times 11,35 \times 0,0625}{6 \times 0,4166} \times \frac{1700^2}{4 \times 16,1},$$

da dann $\frac{1700^2}{4 \times 16,1} = \frac{850^2}{16,1}$ die der Geschwindigkeit 1700 zugehörige Höhe ist; und diese wird $= 44876$ F. wofür Hr. Euler a. a. O. 719 S. die runde Zahl 44900 F. annimmt. Also wird

$$f = \frac{22,7 \times 0,0625 \times 44900}{1,2498},$$

wofür man $\frac{22,7 \times 0,0625 \times 44900}{1,25}$ mit Hr. Eulern nehmen kann, da ohnedem die Zahl 44900 etwas zu groß ist. Auf die Art wird $f = 22,7 \times 5,449 = 5096 1,5$ F. statt dessen Hr. Euler

ler nur 50960 Fuß setzt. Genauer würde man f vermittelst der Logarithmen so berechnen:

$l 96,6 = 1,9849771$
$l 0,4166 = 0,6197193 - 1$

Summe $= 1,6046946$

$l 1700 = 3,2304489$

$l 1700^2 = 6,4608978$
$l 0,0625 = 0,7958800 - 2$
$l 11,35 = 1,0549959$

$6,3117737$
Hievon abgezogen $1,6046964$

giebt $lf = 4,7070773$

also $f = 50942$ Fuß.

Die Stärke des Drucks P selbst giebt nun der Ausdruck $P = \frac{1}{4}\pi ccf\gamma$, und weil $\gamma = 57,75$ Pfund Tr. Gewicht (50 § Hydrost.): so findet man

$l\frac{1}{2}c = 0,4948500 - 2$

$l\frac{1}{4}cc = 0,9897000 - 4$
$l\pi = 0,4971498$
$lf = 4,7070773$
$l\gamma = 1,7615520$

$lP = 3,9554791$

Folglich $P = 9025,6$ Pfund.

Daher ist es so viel, als wenn in jedem Augenblick ein Gewicht von 9025,6 Pfund gegen die Kugel drückte. Das Gewicht M der Kugel selbst ist $= \frac{1}{6}\pi c^3 n\gamma$, und man findet

$lc = 0,7958800-2$

$lc^3 = 2,3876400-6$

$l\pi = 0,4971498$

$ln = 1,0549959$

$l\gamma = 1,7615520$

$5,7013377-6$

$16 = 0,7781513$

$lM = 0,9231864-2$

Also $M = 0,083789$ Pfund.

Von $lP = 3,9554791$

subtr. man $lM = 0,9231864-2$

so wird $l\frac{P}{M} = 5,0322927$

Also $\frac{P}{M} = 107719$, und so viel mahl ist die Kraft des Widerstandes grösser, als die Schwere.

252 §.

Wenn die Festigkeiten der unbeweglichen Massen (250 §) gleich sind; also $f = F$ ist: so hat man $\frac{ncb^2}{a} = \frac{N.C.B^2}{A}$. Schlägt also einerley Kugel mit verschiedenen Geschwindigkeiten an: so wird $n = N$, $c = C$, und $\frac{b^2}{a} = \frac{B^2}{A}$, also $a:A = b^2:B^2$. d. i. die Tiefen der Löcher verhalten sich, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, womit die Kugeln anschlagen. Wenn die anschlagenden Kugeln zwar gleich groß; aber von

verschiedener eigenen Schwere sind: so ist $a : A = nb^2 : NB^2$. d. i. die Tiefen der Gruben verhalten sich, wie die Producte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten, womit die Kugeln anstossen. Ist also $n : N = B^2 : b^2$, oder, verhalten sich die Massen umgekehrt, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, womit die Kugeln anschlagen: so sind die Gruben gleich tief.

Läst man Kugeln von bekannten Höhen in nassen Thon frey fallen, so lassen sich die diesen Höhen zugehörigen Geschwindigkeiten leicht berechnen. Man hat die Versuche würklich angestellt, und befunden, daß der Erfolg mit den eben erwiesenen Regeln übereinstimme. Daher folgt daraus rückwärts die Richtigkeit der im 248 und 249 § zum Grunde gelegten Theorie.

253 §.

Es beruhet aber diese Theorie hauptsächlich auf den Umstand, daß die Theile des unbeweglichen Körpers, welche der eindringende Körper vor sich her schiebt, von den übrigen, womit sie sonst zusammen hiengen, würklich losgerissen werden. In Fällen, wo blos eine Aenderung der Figur des Körpers erfolgt, so daß kein Theil von den übrigen eigentlich losgerissen wird, muß man die Berechnung der Stärke des Drucks beyder Körper gegen einander während des Stosses noch auf andre Voraussetzungen gründen, und dies sind folgende.

Wenn ein Körper A an dem andern B stößt, und es sind nicht alle beyde vollkommen hart: so wird einer in dem andern eine kleine Grube, wie CDE, CFE, drücken, ohne daß deswegen nothwendig so- 189 Fig.

gleich die eingedrückten Theile von den andern losreissen. Eben diesen Eindruck könnte ein Gewicht verursachen, wenn B unterstützt wäre, und auf A ein Gewicht P drückte. Je härter die Körper sind, desto kleiner werden diese Gruben seyn, wenn das Gewicht P einerley ist. Wenn aber die Körper dieselben bleiben: so wird ein grösser Gewicht grössere Gruben drücken. Ein gleiches Gewicht wird in eben den Körper eine eben so grosse Grube drücken; der Gegendruck des Körpers wird alsdenn dem Drucke des Gewichts erstlich gleich seyn, wenn die Grube die für das Gewicht gehörige Grösse hat, und sodann wird A nicht weiter in B eindringen, so daß es mit diesem Druck eine ganz andre Bewandniß hat, wie mit demjenigen, welcher im 248 und 249 § betrachtet worden. Man kann annehmen, daß in einerley Körper, oder überhaupt solchen, die gleiche Härte haben, die eingedruckten Gruben den Pressungen proportional sind.

Wenn demnach ein Körper an den andern stößt: so wird der Druck dieser Körper gegen einander nicht während des ganzen Stosses einerley seyn, sondern vom Augenblick der ersten Berührung, bis zum Moment der grösten Zusammenpressung wachsen, da dann im letzten Moment der Druck am grösten ist.

254 §.

Wenn eine nochmahl so grosse Kraft erfordert wird, in einen Körper A eine eben so grosse Grube zu drücken, als in einen andern B: so wird A doppelt so hart, als B seyn: und überhaupt kann man festsetzen, daß die Härte zweener Körper sich ver-

verhalte, wie die Kräfte, die in diese Körper gleiche Gruben drücken.

Dafern also zwo Kräfte P, p, in Körper A und B von ungleicher Härte D, δ, ungleiche Gruben V, v, drücken: so ist das Verhältniß der Pressungen P, p, aus den Verhältnissen der Härte der Körper, und der Grösse der Gruben zusammen gesetzt. Denn in einen Körper C, dessen Härte $=$ D, drücke die Kraft π die Grube v: so hat man

$$P : \pi = V : v$$
$$\pi : p = D : \delta$$
also $P : p = D . V : \delta . v$.

255 §.

Es folgt aus dieser Proportion $\frac{P}{V} : \frac{p}{v} = D : \delta$,

d. i. die Härte zweener Körper verhalten sich, wie die Pressungen, durch die von ihnen gemachten Gruben, dividirt. Eben diese Proportion läst sich so ausdrücken:

$$1 : \frac{V . p}{v . P} = D : \delta, \text{ oder}$$

$$\frac{V . p}{v . P} : 1 = \delta : D.$$

Man kann sich daher von dem Maasse der Härte eines Körpers ohngefähr diesen Begrif machen. Die Erfahrung muß ergeben, wie groß die Grube V sey, die ein bestimtes Gewicht P in einen Körper von bekannter Härte macht, und dessen Härte $D = 1$ seyn soll. Weiß man dies, z. E. beym Bley, und man findet, daß ein ander Gewicht p in Eisen die Grube

v drückt: so ist $\frac{V.p}{v.P}$ eine Zahl, welche anzeigt, wie viel mahl Eisen härter, als Bley ist.

Einer der leichtesten Fälle, wo man die Stärke der grösten Zusammenpressung, beym Stosse eines Körpers an den andern, berechnen kann, ist der, wenn beyde Körper die Gestalt eines Würfels, oder rechtwinklichten Parallelepipedi haben, und mit zwoen gleichen und ähnlichen Seitenflächen an einander stossen, so daß diese Seitenflächen gleich im Anfange des Stosses an einander passen; und wenn überdem die Richtung des Stosses auf diese Flächen senkrecht ist; wie die folgende Aufgabe ergeben wird.

256 §.

190 Fig. Ein Körper A stößt an einen andern B, und der letzte ist völlig unbeweglich. Beyde Körper haben eine solche Gestalt, wie am Ende des vor. §. angenommen worden. Des Körpers A Härte sey $= \Delta$, des Körpers B Härte $= \delta$: man sucht die Stärke des Drucks beyder Körper gegen einander bey ihrer grösten Zusammenpressung.

Aufl. Man setze, daß im Moment der ersten Berührung der Abstand der Schwerpuncte $AB = f$ sey, und daß von diesem Augenblick an, in der Zeit t der Schwerpunct A um das Stück $A\alpha = x$, vorgerückt, und in diesem Augenblick der Druck beyder Körper gegen einander $= p$, die Geschwindigkeit des Puncts A aber $= v$ sey, die im ersten Moment der Berührung $= a$ war: so hat man $vdv = -\frac{2gp}{A}dx$, wenn A des anstossenden Körpers Masse ist.

ist. Nun setze man, ein Gewicht Π drücke in einen Körper, dessen Härte = D ist, eine Grube, deren Inhalt = k^3. Ferner sey die Berührungs-Ebene der Körper nemlich CD = cc, und es sey die Vorderfläche des Körpers A um die Tiefe = r; die Vorderfläche des Körpers B aber um die Tiefe = s eingedrückt. So ist die in A gemachte Grube = ccr, und die in B gemachte Grube = ccs. Daher wird vermöge des vor. §.

$$\frac{\Pi}{k^3} : \frac{p}{ccr} = D : \Delta, \text{ und}$$

$$\frac{\Pi}{k^3} : \frac{p}{ccs} = D : \delta.$$

Dies giebt $r = \frac{D.p.k^3}{\Delta.\Pi.cc}$, und $s = \frac{D.p.k^3}{\delta.\Pi.cc}$.

Es ist aber $x = r + s$, also wird $x =$

$$\frac{D.p.k^3}{\Pi.cc} \times \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\delta}\right) = \frac{(\Delta+\delta).D.p.k^3}{\Delta.\delta.\Pi.cc},$$

und $p = \frac{\Delta.\delta.\Pi.cc}{(\Delta+\delta)D.k^3} x$. Setzt man dies in die Gleichung $A.vdv = -2gpdx$; oder $2Avdv = -4gpdx$ statt p: so giebt die Integration

$$Avv = A.aa - \frac{2g.\Delta.\delta.\Pi.cc}{(\Delta+\delta)D.k^3} xx.$$

Nun rückt der Schwerpunct A so lange vorwärts, bis $v = o$ ist, und in diesem Augenblick ist die Pressung am grösten. Diese Voraussetzung giebt $A.aa = \frac{2g\Delta\delta.\Pi.cc}{(\Delta+\delta)Dk^3} xx$, und $x = \frac{a\sqrt{A(\Delta+\delta)D.k^3}}{\sqrt{2g.\Delta.\delta.\Pi.cc}}$

=

$= \frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta+\delta)D}.k^3}{\sqrt{\Delta}.\delta.\Pi.cc}$. Dies nun in den obigen Werth für p gesetzt, giebt $p = \frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}.\delta.\Pi.cc}{\sqrt{(\Delta+\delta)D}.k^3}$.

Um ein Beyspiel von einem besondern Falle zu haben, worauf sich dieser Ausdruck anwenden läst, setze man, beyde Körper sind von gleicher Dichtigkeit, also $\Delta = \delta$: und es habe die Erfahrung gelehrt, daß ein Gewicht von 100 Pf. beyde um $\frac{1}{1000}$ eines Fusses eindrücke, welches nur eine sehr geringe Härte seyn würde. Man muß also auch $D = \Delta = \delta$, $\Pi = 100$ Pf, und $r = s = \frac{1}{1000}$ Fuß, $k^3 = 0{,}0001.cc$;

also $\frac{cc}{k^3} = 1000$, $\frac{\Delta.\delta.\Pi}{(\Delta+\delta)D} = \frac{D^2}{2D^2}\Pi$

$= 50$ Pf. setzen. Dies giebt $p = \frac{a\sqrt{A}}{\sqrt{g}}\sqrt{25000}$:

oder $p = a\sqrt{A}\sqrt{\frac{25000}{15{,}625}} = a\sqrt{1600A} = 40.a\sqrt{A}$. Wäre nun $A = 1$ Pf, und $a = 100$ Fuß: so erhielte man $p = 4000$ Pf.

257 §.

Bey eben den Voraussetzungen des vor. §. die Zeit des Stosses vom Moment der ersten Berührung bis zur grösten Zusammenpressung zu finden.

Aufl. Es ist $dt = \frac{dx}{v}$ (113 §.) und $v =$

$= \sqrt{(aa$

$\sqrt{(aa - \frac{2g\Delta . \delta . \Pi . cc}{A(\Delta+\delta)Dk^3} xx)}$. Man setze der Kürze wegen $\sqrt{\frac{A(\Delta+\delta)D.k^3}{2g.\Delta.\delta.\Pi cc}} = K$: so wird $dt = \frac{dx}{\sqrt{(aa - \frac{xx}{kk})}}$, oder $dt = \frac{1}{a}\frac{dx}{\sqrt{(1 - \frac{xx}{aakk})}}$, und $t = \int \frac{dx}{a\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa.kk})}}$. Mit dem Halbmesser AC = BC = 1, sey ein Kreis beschrieben, und AC, PM, auf BC senkrecht. Wenn nun CP = z, PM = y, gesetzt wird: so ist $yy = 1 - zz$. Der Bogen AM = s wachse um das Stück $Mm = \Delta s$, und man ziehe mp, mR, mit AC, BC, parallel: so wächst CP = z um das Stück $Pp = \Delta z$, und y nimmt um das Stück $RM = \Delta y$ ab, wenn AM = s um $Mm = \Delta s$ wächst. Nun ist die Sehne $Mm = \sqrt{(Rm^2 + RM^2)} = \sqrt{(\Delta z^2 + \Delta y^2)} = \Delta z \sqrt{(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta z^2})}$, und wenn Bogen und Sehne verschwinden: so wird $\frac{\text{Bog. } Mm}{\text{Sehne } Mm} = 1$ (466 §. Geom.) Also erhält man $\frac{ds}{dz\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dz^2})}} = 1$, weil Δs, Δy, Δz, zugleich verschwinden, oder $ds = dz\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dz^2})}$. Nun war $yy = 1 - zz$; 191 Fig.

also ist $ydy = -zdz$, und $\frac{dy}{dz} = -\frac{z}{y} = -\frac{z}{\sqrt{(1-zz)}}$. Folglich wird $1 + \frac{dy^2}{dz^2} = 1 + \frac{zz}{1-zz} = \frac{1}{1-zz}$, und $ds = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$.

Dies giebt den Bog. $AM = s = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$.

Man setze nun $z = \frac{x}{a.K}$: so wird $dz = \frac{dx}{a.K}$;

und $\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{dx}{a.K.\sqrt{(1-\frac{xx}{aa.kk})}}$; oder

$K \times \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = \frac{dx}{a\sqrt{(1-\frac{xx}{aa.kk})}}$. Hier-

aus folgt $K \times \int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = K \times$ Bog. $AM = \int \frac{dx}{a\sqrt{(1-\frac{xx}{aa.kk})}}$; also $t = K \times$ Bog. AM.

Nun sucht man eigentlich die Zeit für den Fall, wenn $v = o$ ist. Man setze also $v = \sqrt{\left(aa - \frac{xx}{kk}\right)} = o$: so wird $a = \frac{x}{k}$, und $x = a.k$. Dieser Werth statt x gesetzt, giebt $z = 1$. Wenn aber $z = CP = 1 = CB$ wird: so wird $AM = AB = \frac{1}{2}\pi$

$\frac{1}{2}\pi$ (467 §. G.) Folglich ist die gesuchte Zeit $t = \frac{1}{2}\pi k$.

Behält man die Zahlen des vor. § bey, und setzt $D = \Delta = \delta$, $\Pi = 100$ Pf. $r = s = \frac{1}{1000}$ Fuß; $k^3 = \frac{1}{1000} cc$; also $\frac{k^3}{cc} = \frac{1}{1000}$; $\frac{(\Delta+\delta)D}{\Delta.\delta.\Pi} = \frac{1}{50}$, und $A = 1$ Pfund: so wird $k =$

$$\sqrt{\frac{A}{2g} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{10000}} = \sqrt{\frac{A}{2g} \cdot \frac{1}{10000000}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1562500}} = \frac{1}{1250} = \frac{1}{5 \times 250}. \text{ Dies giebt}$$

$$t = \frac{1}{2}\pi \times \frac{1}{1250} = \frac{1}{2 \times 5} \cdot \frac{1}{250}\pi = \frac{\frac{1}{10}\pi}{250} =$$

$$\frac{0,3141\,59}{250} = \frac{0,0314159}{25}; \text{ also } t = 0,0012566$$

Sec. oder ohngefähr $t = \frac{1}{800}$ Sec.

Der XVII. Abschnitt.

Vom

Maaß der Kräfte des Stosses.

258 §.

Eine jede Kraft, die einer gegebenen Masse, in einer gegebenen Zeit, eine bestimmte Geschwindigkeit mittheilt, läst sich mit der Schwere vergleichen, und zwar ohne weitere Einschränkung, wenn sie wie die Schwere unveränderlich bleibt, da man

im

im Gegentheil für jeden gegebenen Zeitpunct diese Vergleichung besonders anstellen muß, wenn die Kraft veränderlich ist. Die Kraft, womit zweene unvollkommen harte Körper während des Stoßes gegen einander drücken, ist so lange veränderlich, als es blos bey der Aenderung der Gestalt bleibt, ohne daß der Zusammenhang der Theile in dem einen oder andern Körper zerrissen wird; und im 253 bis 256 § ist davon eine Probe gegeben, wie sich diese Kraft berechnen lasse, wenn ein Körper in Ruhe und zugleich so befestigt ist, daß er nicht weichen kann. Dafern aber ein Körper eine so geringe Festigkeit hat, daß der andre, welcher an ihn stößt, die ihm im Wege liegenden Theile von dem übrigen losreißt, und in jenem eine Grube macht: so wird die Kraft des Drucks eine beständige Kraft; dafern, wie hier vorausgesetzt wird, die zerrissene Masse gleichartig ist. Im 249 §. ist gelehret worden, wie diese Kraft in dem Fall mit der Schwere zu vergleichen sey, wenn ein Körper eine solche Grube durch den Stoß in einen andern unbeweglichen schlägt: und es hat keine Schwürigkeit, beyde Betrachtungen auch auf die Fälle zu erweitern, wenn beyde Körper beweglich sind.

259 §.

192 Fig. Die Schwerpuncte der Massen *M* und *N* gehen in einerley graden Linie nach einerley Richtung fort, *M* mit der Geschwindigkeit *b*, *N* aber mit der Geschwindigkeit *c*, und es ist *b* grösser als *c*. Indem *M* die Masse *N* erreicht, stossen die Körper grade und central an einander; und *M* schlägt in *N* eine Grube, deren Tiefe = *a* ist: man sucht, wie stark beyde

de Körper während des Stosses in jedem Augenblick gegen einander drücken.

Aufl. Wenn die erste Berührung in P erfolgt: so sey von diesem Augenblick an die Zeit t verflossen, und in dieser Zeit die Masse N um den Weg $PQ = x$ fortgerückt; die Kugel M aber in die Masse N um die Tiefe $QR = y$ eingedrungen: so ist der ganze Weg der Kugel während dieser Zeit $= PR = x + y$. Am Ende der Zeit t sey der Kugel Geschwindigkeit $= v$; der Masse N Geschwindigkeit $= u$: so ist $\frac{dx + dy}{dt} = v$, und $\frac{dx}{dt} = u$. Ferner sey die Kraft, womit beyde Körper gegen einander drücken, $= P$: so hat man für die Bewegung der Kugel die Gleichung $2Mvdv = -4gP(dx + dy)$, und für die Masse N wird $2Nudu = 4gPdx$. Weil nun P eine beständige Kraft ist: so giebt die Integration $Mvv = C - 4gPx - 4gPy$, und $Nuu = E + 4gPy$. Für $x = 0$, und $y = 0$, muß $v = b$, und $u = c$ seyn. Dies giebt $C = Mbb$, und $E = Ncc$. Also wird $Mvv = Mbb - 4g(x+y)P$, und $Nuu = Ncc + 4gPx$. Die letzte Gleichung giebt $-4gPx = N(cc - uu)$, und wenn man dies in die erste statt $-4gPx$ setzt; so wird $Mvv = Mbb + N(cc - uu) - 4gPy$; oder $4gPy = M(bb - vv) + N(cc - uu)$. Nun fährt die Kugel fort, so lange einzudringen, bis $v = u$ ist; und dann wird $y = a$. Daher erhält man $4gPa = M(bb - vv) + N(cc - vv)$, also

$$P = \frac{Mbb + Ncc - (M+N)vv}{4ga} =$$

$$\frac{M^2bb + MNbb + MNcc + N^2cc - (M+N)^2vv}{4ga(M+N)}.$$

Wenn man die Gleichung $Mvdv = -2gP(dx+dy)$ durch $Nudu = 2gPdx$ dividirt: so wird $\frac{Mvdu}{Nudu} = -\frac{dx+dy}{dx} = \frac{v}{u}$, und dies giebt $Mdv = -Ndu$; also $Mv = C - Nu$. Weil nun $v = b$, wenn $u = c$: so wird $C = Mb + Nc$, und $Mv = Mb + Nc - Nu$. Setzt man also $v = u$, so erhält man $v = \frac{Mb+Nc}{M+N}$, wie im 230 §. für unelastische Körper. Man erhält ferner $(M+N)^2vv = M^2bb + 2MNbc + N^2cc$, und dies in den Ausdruck für P gesetzt, giebt $P = \frac{MN(b-c)^2}{4ga(M+N)}$.

Dafern N im Anfange des Stosses in Ruhe gewesen, so hat man $c = 0$, und $P = \frac{MNbb}{4ga(M+N)}$, und wenn die Masse N unbeweglich ist: so kan man $N = \infty$ setzen, da dann $P = \frac{Mbb}{4ga}$ wird. Wäre nun M eine Kugel, deren Durchmesser e ist, und man setzt, wie im 249 § $P = \frac{1}{4}\pi ee.f.\gamma$, und $M = \frac{1}{6}\pi e^3\delta$: so erhält man $\frac{1}{4}\pi eef\gamma = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi.e^3\delta bb}{ga}$; also $f = \frac{1}{6}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{e.bb}{ga} = \frac{nebb}{6ga}$, wie im 249 §, wo $\frac{\delta}{\gamma} = n$ ist. In dem Fall also, wenn beyde Massen sich bewegen, ist der Druck eben so stark, als wenn N ruhete, und M mit seiner relativen Geschwindigkeit an N anstiesse.

260 §.

Wenn die übrigen Voraussetzungen des vor. §. bleiben; beyde Körper aber die Gestalt haben, welche im 256 §. angenommen worden, und so fest sind, daß keine Zerreissung der Theile erfolgen kann; die stärkste Gewalt des Stosses zu finden.

Aufl. Man erwähle in solcher Absicht aus dem 230 §. die Gleichung $Mvv+Nuu = Maa+Nbb - 4g\int Pdx$, und drücke, wie im 246 §, P durch x aus: so hat man $P = \frac{\Delta.\delta.\Pi.cc}{(\Delta+\delta)D.k^3}x$, und $Mvv+Nuu = Maa+Nbb - \frac{2g.\Delta.\delta.\Pi.cc}{(\Delta+\delta)D.k^3}xx$. Nun ist P am grösten, wenn $v=u$ ist, und diese Voraussetzung giebt $v = \frac{Ma+Nb}{M+N}$ (230 §), folglich wird $\frac{2g.\Delta.\delta.\Pi.cc.xx}{(\Delta+\delta)D.k^3} = Maa+Nbb - \frac{(Ma+Nb)^2}{M+N}$ $= (MNaa+M.N.bb-2M.N.ab):(M+N) = \frac{M.N(a-b)^2}{M+N}$, und $x = \sqrt{\frac{M.N(a-b)^2}{M+N}.\frac{(\Delta+\delta)D.k^3}{2g\Delta.\delta.\Pi.cc}}$. Dies in den Ausdruck $P = \frac{\Delta.\delta.\Pi.cc}{(\Delta+\delta)D.k^3}x$ statt x gesetzt, giebt für P die stärkste Gewalt des Stosses $= \sqrt{\frac{M.N(a-b)^2}{M+N}.\frac{\Delta.\delta.\Pi.cc}{2g.(\Delta+\delta)D.k^3}}$.

261 §.

Es läst sich also nicht überhaupt sagen, wie stark beyde Massen während des Stosses gegen einander drücken; wohl aber, wie stark dieser Druck bey einer gegebenen Entfernung der Schwerpuncte; oder für eine gegebene Zeit sey, die vom ersten Anfang des Stosses verflossen ist. So verhält sich wenigstens die Sache bey unvollkommen harten Körpern. Man kann sich die Kraft, welche während des Stosses beyde Körper nach entgegengesetzten Richtungen treibt, völlig so, wie andre veränderliche Kräfte vorstellen, die für jedes Moment der Zeit, so während des Stosses verfliest, gegen die Schwere ein bestimmtes Verhältniß haben. Die Lehren hievon, so wie sie hier vorgetragen worden, sind aus einer Abhandlung des H. Euler genommen, die den Titul führt: Sur la force de percussion, et de sa veritable mesure. M. s. die Memoires de l'Academie Royale des sciences de Berlin A. 1745. p. 21 u. f.

262 §.

Bey vollkommen harten Körpern würde sich diese Betrachtung nicht anbringen lassen. Ist es wahr, daß ein paar vollkommen harte Körper, die mit gleichen Bewegungen gegen einander laufen, in einem Augenblick, so bald sie anfangen einander zu berühren, in Ruhe kommen: so nimmt die Kraft, welche im Augenblick des Stosses die Körper von einander treibt, einem jeden eine endliche Geschwindigkeit in einem Augenblick. Allein die Schwere kann keinem Körper in einem Augenblick eine endliche Geschwindigkeit nehmen. Daher verhielte sich die Gewalt des Stosses vollkommen harter Körper zur

Schwe-

Schwere, wie eine endliche Geschwindigkeit zu o, und die Gewalt des Stosses wäre unendliche mahl grösser, als die Kraft der Schwere. Der Druck also, den jeder Körper im Augenblick des Stosses leidet, wäre unendlich mahl grösser, als sein Gewicht. So viel uns nemlich von der Natur der Schwere bekannt ist, würde sie einer gegebenen Masse in einer unendlich kleinen Zeit, oder in einem Augenblick, nur eine unendlich kleine Geschwindigkeit mittheilen. Und dies ist die Ursache, warum Galiläus schon die Kraft des Stosses unendlich genannt hat. Die Sache hat nur alsdenn ihre Richtigkeit, wenn der Stoß nur einen Augenblick dauret, wie bey vollkommen harten Körpern.

263 §.

Indessen ist hieraus nicht zu schliessen, daß die Kraft eines solchen Stosses für sich unendlich sey; es folgt nur so viel, daß diese Kraft von andrer Natur, als die Schwere sey, und einer Masse in einem Augenblick eine endliche Geschwindigkeit mitzutheilen vermögend sey, wozu die Schwere eine endliche Zeit braucht. Daher läst sich eine solche Kraft nicht durch ein ihr gleiches Gewicht ausdrücken. Es lassen sich aber Kräfte von dieser Art unter einander, eben so vergleichen, wie diejenigen, die der Schwere ähnlich sind. Weil alle solche Kräfte einer Masse in einem Augenblick eine gewisse Geschwindigkeit mittheilen: so kann man sie als solche betrachten, die ihre Würkungen in gleichen Zeiten zu Stande bringen, und ihr Verhältniß gegen einander ist das zusammengesetzte, aus dem Verhältnisse der Massen und Geschwindigkeiten, die sie diesen Massen in einem Augenblick mittheilen.

So deutlich aber auch diese und alle übrige bisherige Lehren von Vergleichung der bewegenden Kräfte sind; so viele Verwirrung herrscht dennoch bey dem Vortrage verschiedener Schriftsteller, wenn sie vom Maaß der Kräfte reden. Zum guten Glück hat der ganze so sehr berühmte Streit über das Maaß der Kräfte keinen erheblichen Einfluß auf die Wissenschaft selbst; und deswegen könnte diese ganze Streitigkeit hier ohne Nachtheil der folgenden Untersuchungen unberührt bleiben, wenn nicht das Verdienst so grosser Männer, als diejenigen sind, die diese Streitigkeit geführet haben, die Sache wichtig machte: und deswegen soll hier das vornehmste davon erzählt werden, so weit man die Sache wissen muß, um davon richtig urtheilen zu können.

264 §.

Weil ein jeder bewegter Körper eine Ursache neuer Bewegungen andrer Körper werden, und ihre Bewegungen auf mancherley Art verändern kann: so hat man fast beständig diese Sache so betrachtet, als wenn demselben eine besondre Kraft eigen wäre. Man hielte dafür, diese Kraft des Körpers sey desto grösser, je grösser seine Masse und Geschwindigkeit sey, und setzte daher fest, daß die Kräfte verschiedener Körper sich wie die Producte der Massen in ihre Geschwindigkeiten verhalten müsten. Man verglich also die so genannten Kräfte zweener Körper, deren Massen M, *m*, Geschwindigkeiten C, *c*, sind, so wie ihre Bewegungen, nach dem 57 § verglichen werden müssen: man setzte das Verhältniß ihrer Kräfte $= MC : mc$.

265 §.

Hiebey ist nun gleich anfangs zu bemerken, daß man schwerlich deutlich werde anzugeben wissen, was das Wort Kraft hier recht heissen solle. Sieht man die Geschwindigkeiten C, *c*, womit die Massen M, *m*, jetzt fortgehen, als solche an, die von bewegenden Kräften in gleichen Zeiten den Massen mitgetheilt sind: so hat es seine Richtigkeit, daß diese bewegende Kräfte sich, wie MC:*mc* verhalten. Allein dies sind alsdenn nicht Kräfte der bewegten Massen; sie müssen wenigstens in Gedanken davon unterschieden, und die Massen als der leidende Theil betrachtet werden. Man wird antworten: eben dadurch, daß die Masse in Bewegung gesetzt worden, sey ihr auch eine Kraft mitgetheilt, und diese nun in der Masse hervorgebrachte Kraft sey dem MC proportional. In der That aber gründet sich diese Vorstellung auf einen ganz verwirrten Begrif dessen, was in der Mechanik eigentlich Kraft heissen muß. Sie ist von Redensarten des gemeinen Lebens hergenommen, die nicht allemal der Sache selbst genau angemessen sind. Vermöge der allgemein angenommenen Grundsätze der Mechanik kann man einer Masse, die mit der Geschwindigkeit C gleichförmig fortgeht, so wenig eine eigentlich so genannte bewegende Kraft zuschreiben, so wenig man sie der ruhenden Masse beylegen kann. Will man aber der bewegten Masse deswegen eine Kraft zuschreiben, die noch in etwas andern, als in der blossen Trägheit, bestehen soll, weil sie den Zustand der Bewegung andrer Körper ändern kann: so muß man aus eben der Ursache der ruhenden Masse gleichfalls eine Kraft beylegen. Denn die ruhende Masse kann so gut den Zustand der Be-

wegung andrer Massen ändern, so gut es die bewegte thun kann. Zwar redet man im gemeinen Leben so: die bewegte Masse M stosse die ruhende N fort; oder M setze N in Bewegung. Allein, wenn man die Sache nach richtigen Begriffen beurtheilen will: so muß man wegen dieser Redensarten nicht in der Masse M allein die Ursache der in N hervorgebrachten Bewegung suchen; sondern vielmehr in beyden zugleich, weil beyde undurchdringlich sind. Hat dies seine Richtigkeit, warum soll denn auch die ruhende Masse N nicht eine Kraft haben? da sie doch die Bewegung der Masse M vermindert, und eben das, was die Schwere thut, wenn ein Körper aufwärts geworfen wird. Wäre N, wie der geometrische Raum durchdringlich: so wäre N nicht in Bewegung gekommen, und M hätte seine Bewegung unverändert behalten.

Herr Euler macht eben diese Erinnerungen in der vorhin angeführten Abhandlung Sur la force de percussion, p. 30. u. f.

266 §.

Wer inzwischen M. C bewegende Kraft nennen will, der hat seine Freyheit: er nennt das bewegende Kraft, was eigentlich Bewegung heissen sollte. Man hätte vielleicht diese Redensart, die Cartesius und Mersennus eingeführt haben, wie manche andre eben so wenig richtige, in der Mechanik allgemein beybehalten, wenn nicht der Hr. von Leibnitz darauf verfallen wäre, diese so genannte bewegende Kräfte auf eine andre Art zu vergleichen; die sich aber doch noch immer auf die unrichtige Vorstellung gründet, als ob man einem bewegten Körper vorzüglich eine bewegende Kraft zuschreiben müsse, die ein

ruhender Körper nicht besitze. Seine Regel ist diese: die Kräfte der Massen *M*, *m*, die mit den Geschwindigkeiten *C*, *c*, fortgehen, verhalten sich wie *M.CC* : *m.cc*, und sein Beweis davon in den Actis Erud. Lipf. Mart. 1686. p. 161. lautet so. Es sollen zweene Körper A und B, von 4 Pfund und 1 Pfund am Gewichte, frey herabfallen; der erste von 1 Fuß, der zweyte von 4 Fuß Höhe. Diese erlangen durch den Fall eine Kraft, vermöge welcher sie in umgekehrter Richtung auf dieselbe Höhe wieder steigen können. Diese verlangten Kräfte sind gleich, weil eben die Kraft nöthig ist, die vierfache Last auf die einfache Höhe zu heben, welche erfordert wird, die einfache Last auf die vierfache Höhe zu bringen. Weil nun die durch den Fall erlangten Geschwindigkeiten sich wie die Quadratwurzeln aus den Höhen verhalten: so erlangt B eine Geschwindigkeit, die doppelt so groß ist, als diejenige, welche A erlangt. Verhalten sich nun die Kräfte, wie M.C: so verhält sich des Körpers A Kraft, zur Kraft des Körpers B = 4 Pf. × 1 : 1 Pf. × 2 = 2:1, welches falsch ist, weil die Kräfte gleich seyn müssen. Verhalten sich aber die Kräfte, wie $M.C^2$: so ist das Verhältniß der Kräfte von A und B = 4 Pf. × 1 : 1 Pf. × 4 = 4:4. d. i. die Kräfte sind gleich, wie erfordert wird. Also muß die letzte Vergleichung die richtige seyn.

267 §.

In diesem Beweise vermisset man sehr die sonst gewöhnliche Deutlichkeit mathematischer Demonstrationen, und es wird die Statische Vergleichung der Pressungen (43 § St.) auf eine sonderbare Art

hier angebracht. Um kurz aus der Sache zu kommen, darf man nur folgendes erwägen. Die Höhen, auf welche die Körper steigen, werden hier als Würkungen angesehen, und die bewegten Körper als die Ursachen dieses Steigens auf eine gewisse Höhe. Bey gleichen Massen sollen sich die Kräfte, wie die Höhen verhalten, und bey gleichen Höhen, wie die Massen. Steigt also M auf die Höhe a; N auf die Höhe b; eine dritte Masse Q = M, auf die Höhe b: so ist

$$\text{Kr. M} : \text{Kr. Q} = a : b,$$
$$\text{Kr. Q} : \text{Kr. N} = (\text{Q oder M}) : \text{N},$$
$$\text{also Kr. M} : \text{Kr. N} = \text{M}.a : \text{N}.b.$$

Sind nun C und c die Geschwindigkeiten, womit M und N zu steigen anfangen: so ist $a : b = C^2 : c^2$; also Kr. M : Kr. N = $MC^2 : mc^2$. Darauf gehen nun eigentlich des Hrn. von Leibnitzens Gedanken hinaus, die er im Specim. Dynam. in den Actis Erud. Apr. 1695 noch weiter erläutert. Man könnte ihm, und allen, die ihm folgen wollten, die Freyheit lassen, die Kräfte so zu messen, wenn die Vorstellung nur nicht gar zu unnatürlich wäre, den bewegten Körper als die Ursache des Steigens durch eine gewisse Höhe anzusehen, und ihm deswegen eine ihm eigene Kraft beyzulegen, vermöge welcher derselbe seine eigene Masse auf eine gewisse Höhe heben soll (M. s. H. v. Leibnitz Abh. a. a. O. p. 162.) Der Körper steigt vermöge seiner Trägheit, so wie ein ruhender Körper vermöge seiner Trägheit ruhet, und weiter ist so wenig in dem bewegten, als in dem ruhenden Körper etwas, das den Namen einer Kraft verdiente.

268 §.

Leibnitzens Ansehen brachte ihm inzwischen bald viele Vertheidiger seines Kräften-Maasses zuwege. Dahin gehören Bernoulli, Hermann, Bülffinger, Wolf, Gravesand, Musschenbröck, u.a. m. Die alte Ausmessung aber durch MC vertheidigten Mairan, Jurin, Desaguliers, Maclaurin, und Heinsius, der mit Srübnern darüber in einen Schriftwechsel gerieth. Leibnitz wollte die Sache durch eine neue Eintheilung recht deutlich machen. Körpern, die blos drücken, wie Gewichte, die unterstützt sind, legte er eine todte Kraft bey, und gab zu, daß diese sich wie M.C verhalten, wenn C die Geschwindigkeit bedeutet, womit sie anfangen würden, sich zu bewegen, im Fall das Hinderniß gehoben würde. Bewegten Körpern aber schrieb er eine lebendige Kraft zu, und diese soll sich wie $M.C^2$ verhalten, wenn C die würkliche Geschwindigkeit des Körpers ist.

269 §.

Allein diese neue Eintheilung bringt die Begriffe von den Kräften vollends in Verwirrung. Ein blos drückender Körper drückt ja nicht selbst; sondern das, was drückt, muß wenigstens in Gedanken von ihm unterschieden werden. Es ist wenigstens etwas anders, als was wir Trägheit nennen. Fällt das Hinderniß weg, was den Druck aufhält: so ist wiederum der Körper nicht selbst dasjenige, was ihn bewegt. Eben das, was vorhin drückte, ist zugleich dasjenige, was den Körper nun bewegt. Hört dies einmahl auf, den Körper weiter zu beschleunigen: so behält zwar der Körper die letzte Geschwindigkeit,

und

und geht damit vermöge seiner Trägheit gleichförmig fort. Allein was soll nun in dem Körper sitzen geblieben seyn, das den Namen einer lebendigen Kraft verdiente? Man hat also gestritten, wie Kräfte mit einander verglichen werden müssen, und hat nicht daran gedacht, vorher zu fragen, ob nicht das, was man messen wollte, vielleicht überall eine Chimäre sey. Man muß nothwendig fragen, was M.C, oder M.C² eigentlich seyn sollte? Beydes kann keinen Druck, keinen Zug, keinen Stoß ausdrücken. Wir haben aber keine Begriffe von andern Kräften, als solche, die entweder drücken, oder ziehen, und der Stoß ist nichts anders, als ein heftiger Druck, der schleunig entstehet, wenn zweene Körper sich so begegnen, daß eine Aenderung in ihrem Zustand erfolgen muß. Daß die Stärke eines solchen Stosses sich weder durch M.C noch durch M.C² ausmessen lasse, (worauf man sonst noch am ersten verfallen mögte) erhellet aus dem 258 u. f. §§.

270 §.

Die im 252§. angeführten Versuche sind indessen von den Vertheidigern des so genannten Leibnitzischen Kräftenmasses gebraucht worden, ihre Lehre zu erhärten. Man siehet die Tiefe der Löcher, welche gleich grosse und ungleich schwere Kugeln, die von verschiedenen Höhen herab fallen, in weichen Thon schlagen, als die Würkungen der Kräfte an, die man den Kugeln zuschreibt, und weil diese sich, wie die Producte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten der anschlagenden Kugeln verhalten; so soll dies auch das Verhältniß der ihnen zugeschriebenen Kräfte seyn. Allein es verhält sich mit

dieser

dieser Sache eben so, wie mit steigenden Körpern, denen die Schwere entgegen drückt. Die anschlagenden Kugeln besitzen nichts, was Kraft heissen kann. Sie dringen vermöge ihrer Trägheit in den Thon hinein, und der Druck, welcher in jedem Augenblick durch die Berührung der folgenden Theile des Thons entstehet, vermindert die Bewegung der Kugeln, so wie der Druck der Schwere die Bewegung steigender Körper.

271 §.

Soll die Eintheilung der Kräfte in todte und lebendige noch einigermassen verständlich seyn; so ist am natürlichsten zu glauben, daß Leibnitz durch die lebendige Kraft eine würksame und thätige Kraft, etwas, das würklich Bewegungen verursacht, verstanden wissen wolle, oder recht metaphysisch zu reden, eine vim agentem, in actu secundo constitutam: und daß todte Kraft so viel heissen solle, als vis non agens, vis in actu primo constituta. Fast alle Schriftsteller, sie mögen für oder wider Leibnitzen geschrieben haben, erklären sich auch über diese Eintheilung so, und ich muß gestehen, daß wie es mir vorkömmt, die eigene Leibnitzische Erklärung im Specim. Dynam. a. a. O. p. 149. nicht wohl anders verstanden werden könne. Der Druck soll eine todte Kraft seyn, und die lebendige weit mehr thun; est vis cum motu actuali conjuncta, so steht a. a. O. Man muß also denken, es sey eine Kraft, die ihre Masse würklich bewegt. Indessen erklärt sich doch Joh. Bernoulli, der eifrigste Vertheidiger des Hn. von Leibnitz, darüber ganz anders. Er verstehet durch lebendige Kraft ein blosses Vermögen zu

han-

handeln, folglich eine vim non agentem, in actu primo constitutam. Dies sagt Bernoulli selbst in der Diss. de vera ratione virium vivarum §. III. Oper. T. III. p. 240, wenn er sich so ausdrückt: Hinc patet, vim vivam, (quæ aptius vocaretur *facultas agendi*, Gallice *le pouvoir*) esse aliquid reale &c. und eben daselbst im 1 §. p. 239. vis viva non consistit in actuali exercitio, sed in *facultate agendi*. Diese Erklärung giebt der eigentlichen Streitfrage einen ganz andern Sinn, als die meisten Schriftsteller zum Grunde setzen. Hat Bernoulli die eigentliche Meynung des H. v. Leibnitz getroffen: so hätte Leibnitz nicht sagen sollen: vis mortua est sollicitatio ad motum, sondern vielmehr so: sollicitatio ad motum gignit vim mortuam, und von der vi viva hätte es heissen müssen: est vis cum motu actuali *genita*. Die todte Kraft ist nun eigentlich gar keine, oder vielleicht besser mit Leibnitz oder Bernoulli zu reden, ein unendlich kleines Vermögen, den Zustand andrer Körper zu ändern. Es ist nicht mit dem Druck einerley, sondern es ist etwas, das der Druck als eine Ursache hervorbringt. Wenn nun Leibnitz ferner sagt: vis est viva ex infinitis vis mortuæ impressionibus nata; so muß man diese Worte so verstehen: wenn nach gehobenem Hinderniß das, was vorhin drückte, z. E. die Schwere, eine Masse würklich bewegt, so setzt die Schwere in jedem folgenden Augenblick in die Masse ein unendlich kleines Vermögen hinein, welches denn in endlicher Zeit ein endliches Vermögen, d. i. die vim vivam erzeuget. Druck und vis mortua sind hier also, wie Ursache und Effect unterschieden, und Leibnitz hätte diesem Sinn gemässer seine Worte so fassen müssen: vis est viva ex infinitis viribus

bus mortuis impressis nata. Ich glaube, daß diese Vorstellung wenigstens den Begriffen völlig gemäß sey, die Joh. Bernoulli von der Sache hatte. Er sagt im Discours sur le mouvement Chap. III. Def. II. La force morte est celle, que reçoit un corps sans mouvement, lorsqu' il est sollicité & pressé de se mouvoir &c. Oper. T. III. pag. 23. Also ist die Pression die Ursache, und die force morte die Würkung. Das schlimmste ist, daß Bernoulli so wenig, als andre, bey einerley Art sich zu erklären geblieben sind. In der Abhandlung de vera notione virium vivarum, §. 4. redet er wieder so, als wenn vis mortua und pressio völlig einerley Sache seyn soll. Doch die Schriftsteller, welche auf diesen Unterscheid so sehr dringen, mögen es selbst ausmachen, was die vis mortua eigentlich seyn soll. So viel ist gewiß: nach der Bernoullischen Erklärung der vis vivæ hat die Frage, wie verhält sich die lebendige Kraft der Masse M zur lebendigen Kraft der Masse N diesen Sinn: wie viel kann M mehr oder weniger, als N ausrichten? Wenn man nun die Höhen, worauf vertical aufwärts geworfene Körper steigen können, die Tiefe der Löcher, welche frey herabfallende Körper in weichen Thon schlagen können, oder was sonst dem ähnlich ist, für dasjenige annimmt, was diese den bewegten Massen zugeschriebenen facultates ausrichten können, so muß freylich das Verhältniß $M.C^2 : N.c^2$ daraus folgen.

272 §.

Die Vertheidiger des Cartesianischen Kräftenmaasses geben zu, daß die so genannten lebendigen Kräfte zwoer Massen M und N, die auf die Höhen

a und b steigen, sich wie $Ma : Nb$ verhalten, aber nur alsdenn wenn die Massen zu diesen Höhen in gleichen Zeiten gelangen. Sie erinnern eben dasselbe, wenn a und b die Tiefen der Gruben bedeuten, welche die Massen M und N in weichen Thon schlagen. Wenn aber eine Masse in einfacher Zeit auf eben die Höhe steigt, die eine andre gleiche Masse in doppelter Zeit erreicht; so soll die Kraft der ersten doppelt so groß, als die Kraft der zweyten, und überhaupt die Kräfte den Zeiten umgekehrt proportional seyn, worin gleiche Massen gleiche Höhen erreichen. Wenn also M und N in den Zeiten T und t auf die Höhen a und b stiegen, so verhielten sich die Kräfte wie

$$\frac{M.a}{T} : \frac{N.b}{t} = \frac{M.C^2}{T} : \frac{N.c^2}{t}.$$

Aber $T : t = C : c$, also wird dies Verhältniß $= M.C : N.c$. Demnach wären in dem Leibnitzischen Exempel (266 §) die Kräfte der Massen nicht gleich, sondern es hätte A doppelt soviel Kraft als B, weil A nur halb soviel Zeit braucht, seine Höhe wieder zu erreichen, als B nöthig hat. In der That wäre diese Vergleichung auch natürlicher, als die Leibnitzische, wenn nicht die allgemeinen Erinnerungen des 265 § eine solche Vergleichung überall unnütz machten. Wenn ein Knabe in einem ganzen Tage soviel ausrichtet, als ein erwachsener Mann in einer Stunde, oder noch geringerer Zeit, so haben doch wohl nicht beyde gleiche facultates? Vergleicht man indessen dasjenige hiemit, was Bernoulli a. a. O. §. X. XI. auf diesen Einwurf antwortet, so siehet man wohl, daß seine Vorstellungen dahinaus gehen. Man müsse den erwachsenen Mann und den Knaben mit frischen Kräften anfangen, und die Arbeit von

einem

einem jeden so lange fortsetzen lassen, bis er völlig ermüdet, also seine Kraft ganz erschöpft sey: was nun beyde ausgerichtet hätten, verhalte sich, wie ihre Kräfte, oder facultates, da dann der erwachsene Mann mehr als der Knabe wird ausgerichtet haben. Will man die Vergleichung so anstellen, so braucht man freylich die Zeit nicht in Betracht zu ziehen.

273 §.

Es würde hier eine viel zu grosse Weitläuftigkeit seyn, alle Beweise und Gegenbeweise beyder Partheyen zu erzählen, und zu prüfen. Wer die Lehren der Statik und Mechanik wohl inne hat, und aus der kurzen Erzählung von dem Ursprunge des Streits gelernet hat, worauf die Sache ankomme, dem muß es ein leichtes seyn, die Schriftsteller selbst zu prüfen, die sowohl zu der einen, als zur andern Parthey gehören. Besonders haben diejenigen, welche das Leibnitzische Maaß vertheydigen, den Grundlehren der Statik und Mechanik ihrem Lieblingssatze zu gefallen, oft viele Gewalt angethan. Dies hat ihnen Maclaurin sehr vollständig gewiesen im Account of Sir Isaac Newtons Phil. Discoveries Book II. Chap. 2., und Scherffer in den Institutionibus Physicæ Tom. I. Exercit. II. Part. III. Art. III-VI. p. 231-262. Herr Hofr. Kästner erzählt kurz die Geschichte des Streits in den Anfangsgr. der höhern Mechanik III Abschn. 202 u. f. §. §. 370 u. f. S. Daniel Bernoulli erklärt sich unter allen, die das Leibnitzische Maaß vertheidigen, soviel ich gefunden habe, darüber am richtigsten. Wenn man dasjenige liest, was er in der Abhandlung Examen principiorum Mechanicæ, Comment. Acad. Petrop.

T. I. p. 130-132. davon sagt, so siehet man wohl, daß er selbst den ganzen Streit für eine Logomachie halte. Eine vierfache Kraft hat einer Masse doppelt so viel Geschwindigkeit mitgetheilt, als eine einfache Kraft eben derselben Masse mitgetheilt hat, nachdem beyde Massen einen gleichen Weg zurück gelegt haben. Dies beweist die Formul $c = \sqrt{2spdx}$ (112 §), woraus $c = 2\sqrt{2spdx}$ wird, wenn man $4p$ statt p schreibt. Laufen nun beyde Massen nach entgegengesetzter Richtung mit der erlangten Geschwindigkeit zurück; so widersetzt sich der letzten in jedem Augenblick eine viermahl so grosse Kraft als der ersten, und wenn beyde zur Ruhe kommen, so hat jene viermahl soviel Widerstand, als diese überwunden. Hiebey wird die verflossene Zeit nicht betrachtet. In gleicher Zeit aber theilt die Kraft $2p$ der Masse M doppelt soviel Geschwindigkeit mit, als ihr p mittheilen würde nach der Formul $c = spdt$. Wenn nun beyde Massen wie vorhin zurück laufen, so kommen sie in gleicher Zeit zur Ruhe, und wenn dies erfolgt ist, so hat jene Masse doppelt so viel Widerstand als diese überwunden. Beyde Theile haben also Recht, und der Streit wird gehoben seyn, wenn man sich nur einander verstehen will.

Uebrigens aber weiß ich nicht, ob ich irre, wenn ich behaupte, daß die statische Theorie von Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte überall bey dieser Streitigkeit übel angebracht sey. Diese Lehre läst sich nur da anwenden, wo von Pressungen die Rede ist, und das sind die so genannten lebendigen Kräfte nicht (272 §). Es ist gewiß sehr sonderbar, wenn die Diagonale und die Seitenlinien eines Parallelogramms facultates agendi vorstellen, und die letztern

so

so verglichen werden sollen, wie man Pressungen vergleicht. Daher fällt alles von selbst weg, was aus dieser Theorie sowohl für als gegen das Leibnitz-Bernoullische Kräften-Maaß, ist geschlossen worden. Ich kenne in der ganzen Statik und Mechanik keine andre Kräfte, als Pressungen, die entweder durch Hinderniße aufgehalten werden, oder die Massen, welche sie pressen, würklich bewegen, und deren Natur in beyden Fällen einerley ist und bleibt. Auf diese Begriffe, nebst dem, was Trägheit heist, läst sich die ganze Mechanik bauen, und so viel ich einsehen kann, kommt die ganze hier herrschende Verwirrung darauf an. Von einer mechanischen Kraft haben wir einen blos sinnlichen Begrif, so wie z. E. von einer graden Linie. Daher können wir aus diesem Begrif eigentlich nichts schliessen, wir müssen vielmehr die ersten Grundsätze der gesammten Mechanik so gut, wie die ersten geometrischen Grundsätze, aus sinnlichen Empfindungen hernehmen. Druck, Zug, Stoß, sind die Wörter, die wir im gemeinen Leben da gebrauchen, wo eigentlich von einer bewegenden Kraft die Rede ist, und dies ist allemahl etwas thätiges. Wir brauchen aber das Wort Kraft auch in unzehligen andern Fällen, wo es ein blosses Vermögen bezeichnet, wir schreiben Geistern Kräfte zu, dem einen eine grössere, dem andern eine kleinere, wenn der eine mehr thun kann, als der andre. Diese Kräfte kennen wir noch weniger, als die mechanischen, wir haben eigentlich, wenn wir wir es aufrichtig heraus sagen wollen, gar keinen Begrif davon. Diese Art Kräfte aber hat man mit den mechanischen unter ein genus bringen, und sie auf ähnliche Art, wie die mechanischen unter ein-

ander vergleichen wollen. So etwas, das in diesem so sehr allgemeinen Verstande Kraft heissen soll, hat man einem bewegten Körper auch zugeschrieben. Dies heist aber, den metaphysischen Begrif einer Kraft mit dem mechanischen verwirren, und die Mechanik in eine eben so dunkle Wissenschaft verwandeln, als viele metaphysische Systeme sind.

274 §.

In der That wäre es sehr zu verwundern, daß Männer von so grossen Verdiensten, wie Johann Bernoulli war, und andre, die im 273 §. genannt sind, so eifrig auf einen Satz bestehen können, wogegen doch mit Grunde sehr vieles erinnert werden konnte; wenn sie nicht geglaubt hätten, daß derselbe, wenn er zur überzeugenden Richtigkeit gebracht wäre, in Ansehung der mechanischen Wissenschaften selbst einen wichtigen Einfluß hätte. Dies war es auch würklich, wodurch sie bewogen wurden, so fest auf diesem Satze zu halten. Sie glaubten ein allgemeines sehr wichtiges Natur-Gesetz gefunden zu haben, das sich, ihrer Meynung nach, nothwendig auf diese Begriffe gründete, und welches man so ausdrückte: In der Körper-Welt wird immer einerley Summe der Kräfte erhalten, und es gehet keine lebendige Kraft verlohren. Man nannte diesen Satz den Grundsatz von Erhaltung der lebendigen Kräfte (principium conservationis virium vivarum.) Dieser Grundsatz sollte einen andern ähnlichen verdrängen, den Cartes behauptet hatte, nemlich folgenden: In der Körperwelt wird beständig einerley Summe der Bewegung erhalten, und es gehet keine Bewegung verlohren.

275 §.

275 §.

Man ist zuerst durch Betrachtung der Gesetze des Stosses, sowohl auf den einen, als auf den andern Satz verfallen, und den letzten Cartesianischen Satz giebt die im 230 §. gefundene Gleichung $Ma+Nb = Mv+Nu$, wenn a und b die Geschwindigkeiten der Massen M und N vor dem Stosse, v und u aber ihre Geschwindigkeiten nach dem Stosse, bedeuten. Man muß aber, wenn der Satz so, wie er ausgedrückt ist, allgemein wahr seyn soll, die algebraische Summe, folglich die arithmetische Differenz in dem Fall verstehen, wenn beyde Körper einander entgegen gehen.

Wenn k die Geschwindigkeit des Schwerpuncts beyder Massen ist: so hat man vor und nach dem Stosse $k = \frac{Ma+Nb}{M+N}$; oder $(M+N)k = Ma+Nb$.

Wenn man sich also beyde Massen im Schwerpunct vereinigt vorstellt: so läst sich dieser Satz so ausdrücken: Die Grösse der Bewegung des Schwerpuncts, ist vor und nach dem Stosse einerley, und der Zustand des Schwerpuncts wird durch den Stoß nicht geändert. Joh. Bernoulli konnte die Richtigkeit des Satzes selbst, so wie er hier vorgetragen ist, nicht läugnen, indessen drückte er ihn mit andern Worten aus. Er nannte das Product $(M+N)k$ Grösse der Richtung (quantité de direction. Disc. sur le mouvement Ch. IV. §. 8. Oper. T. III. p. 32.) da es doch sonst viel deutlicher Grösse der Bewegung geheissen hätte.

276 §.

Der Leibnitz-Bernoullische Satz von Erhaltung

lebendiger Kräfte liegt in der zweyten Gleichung des 230 §. $Maa+Nbb=Mvv+Nuu$; wenn nemlich die lebendige Kraft durch das Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit gemessen werden soll. Hier muß nun allemahl die wahre arithmetische Summe der so genannten lebendigen Kräfte verstanden werden. Wenn nemlich gleich b negativ wäre: so bleibt doch bb positiv. Dieser Umstand gab dem Satze selbst eben so viel einnehmendes, und wenn man einmahl einem jeden bewegten Körper eine besondre von seiner Trägheit unterschiedene Kraft, beylegt; so wird man auch sehr geneigt seyn, zu glauben, daß die Summe aller in der ganzen Körperwelt vertheilten lebendigen Kräfte dieselbe bleibe, die Körper mögen, wie man will in einander würken, und daß eine Kraft, die ein Körper verliert, nur in andre übergehe. Joh. Bernoulli hält dies für so evident, daß er a.a.O. p.56 behauptet, man würde dies Gesetz nur verdunkeln, wenn man unternehmen wollte, es zu beweisen. Dem sey nun, wie ihm wolle: so ist doch aus dem vorhergehenden klar, daß die Gleichung $Maa+Nbb=Mvv+Nuu$ nur für vollkommen elastische Körper, keinesweges aber für unelastische Körper gelte, und eben deswegen kann es kein ganz allgemeines Naturgesetz seyn. Vermuthlich hätte Bernoulli diesem Satze zu gefallen, auch gern alle weiche unelastische Körper, so wie die vollkommen harten Körper dem Gesetze der Stetigkeit zu gefallen, aus der Natur verbannet, wenn nur die Erfahrung nicht gar zu offenbar dagegen wäre.

Er begnügte sich also mit andern Vertheidigern dieses Grundsatzes damit, daß er behauptete, ein

Theil

Theil der lebendigen Kraft bey weichen unelastischen Körpern werde auf die Zusammendrückung verwandt, bleibe aber doch in den zusammengedrückten Theilen, und werde nur deswegen nicht wieder thätig, weil die Weichheit des Körpers es hindere. M. s. die Abhandl. de vera not. vir. viv. §. IX.

277 §.

Wenn ein ganzes System mehrer Massen in Bewegung ist; und diese Massen während der Bewegung in einander würken: so ist die Summe der Producte aller einzelnen Massen in die Quadrate ihrer erlangten Geschwindigkeiten in jedem Augenblick eben so groß, als sie seyn würde, wenn diese Massen nicht in einander gewürkt hätten.

Dies ist eigentlich der Sinn des so berühmten Grundsatzes von Erhaltung der lebendigen Kräfte, und wenn man ihn so verstehet, wie er hier ausgedrückt ist; so ist es gewiß, daß die Richtigkeit desselben in vielen Fällen sich aus andern Gründen, als den so sehr verwirrten und schwankenden Begriffen von den lebendigen Kräften, herleiten lasse. Die völlige Allgemeinheit dieses Satzes aber hat niemand bisher bewiesen.

278 §.

Die Theorie vom Mittelpuncte des Schwunges, giebt hievon ein Beyspiel ab. Es sey nemlich CA eine grade unbiegsame Linie ohne Schwere, die sich frey um C drehen kann. Sie sey in A, B, D, mit Gewichten beschwert, deren Massen A, B, D, sind. Wenn nun G dieser Gewichte Schwerpunct ist, und O der Mittelpunct des Schwunges des aus diesen

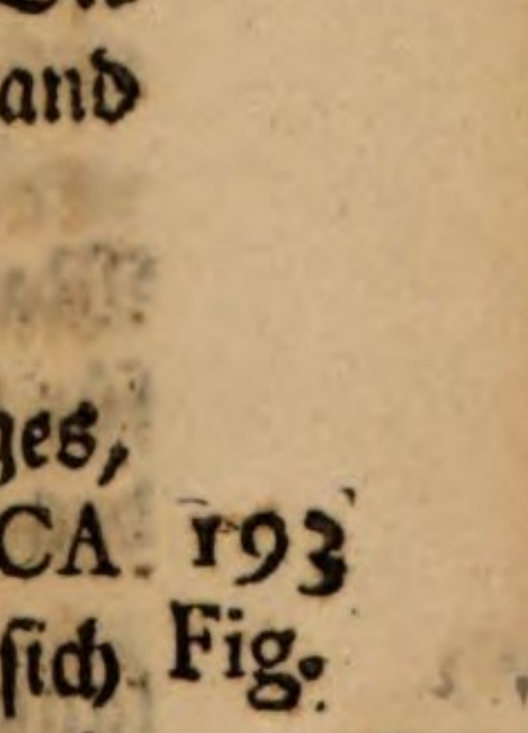


Fig. 193

dreyen Gewichten zusammengesetzten Penduls; so hat man $CO.CG.(A+B+D) = CA^2.A+CB^2.B+CD^2.D$ (176 §), und weil $CG = CA.A+CB.B+CD.D$: so ist auch $CO.CA.A+COCB.B+CO.CD.D = CA^2.A+CB^2.B+CD^2.D$. Es sey CH die Verticallinie, und der Elevations-Winkel $ACH = \alpha$. Man multiplicire die letzte Gleichung mit $\frac{sin\,v.\alpha}{CO}$: so wird $(CA.A+CB.B+CD.D)\,sin\,v.\alpha = (CA^2.A+CB^2.B+CD^2.D)\frac{sin\,v.\alpha}{CO}$. Wenn man nun mit den Halbmessern CD, CB, CA, CO, die Kreisbogen AE, BM, DN, OQ beschreibt, und AF, BH, DK, OP horizontal ziehet: so ist $FE = CA.sin\,v.\alpha$, $HM = CB.sin\,v.\alpha$, $KN = CD.sin\,v.\alpha$, $PQ = CO.sin\,v.\alpha$, und $\frac{PQ}{CO^2} = \frac{sin\,v.\alpha}{CO}$. Dies in die letzte Gleichung gesetzt, giebt

$$\frac{FE}{PQ}.A+\frac{HM}{PQ}.B+\frac{KN}{PQ}.D =$$

$$\frac{CA^2}{CO^2}.A+\frac{CB^2}{CO^2}.B+\frac{CD^2}{CO^2}.D.$$

Man betrachte nun CO als ein einfaches Pendul für sich allein, und nehme an, die Geschwindigkeit des Puncts O in dem Augenblick, da O in Q anlangt, sey $= u$: so wird $PQ = \frac{uu}{4g}$ (132 §).

Dies giebt $4g(FE.A+HM.B+KN.D) =$

$$\frac{CA^2.u^2}{CO^2}A+\frac{CB^2.u^2}{CO^2}B+\frac{CD^2.u^2}{CO^2}.D.$$

Hier-

Hierauf betrachte man das zusammengesetzte, mit den Gewichten A, B, D beschwerte Pendul, und nehme an, daß die würklichen Geschwindigkeiten, die sie wegen ihrer Verbindung unter einander in dem Augenblick erlangt haben, da sie in die Verticallinie kommen, a, b, c, so wird $a = \frac{CA.u}{CO}$; $b = \frac{CB.u}{CO}$; $c = \frac{CD.u}{CO}$ (137 §); vorausgesetzt, daß die Winkel-Geschwindigkeit beyder Pendul gleich sey, wie erfordert wird. Folglich ist

$$4g(FE.A + HM.B + KN.D) = A.a^2 + B.b^2 + D.c^2.$$

Wenn endlich die Massen A, B, D, jede für sich allein an der Stange angebracht wären, und sie hätten in dem Augenblick, da sie in die Verticallinie kommen, die Geschwindigkeiten α, β, γ: so wäre $\alpha = 2\sqrt{g}.FE$, $\beta = 2\sqrt{g}.HM$, $\gamma = 2\sqrt{g}.KN$. Daher erhält man

$$A.\alpha^2 + B.\beta^2 + D.\gamma^2 = A.a^2 + B.b^2 + D.c^2.$$

Also ändert sich die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der erlangten Geschwindigkeiten nicht, die Massen A, B, D mögen, als einfache Pendul betrachtet, frey in die Verticallinie fallen, oder als Theile des zusammengesetzten Penduls, während der Bewegung in einander würken.

Wenn man demnach die letzte Gleichung vermöge des Grundsatzes von Erhaltung der lebendigen Kräfte, als wahr annimmt: so kann man daraus umgekehrt mit Joh. Bernoulli (Disc. sur le mouvement Chap. XIV. Oper. Tom. III. pag. 78 seqq.) die Theorie vom Mittelpunct des Schwunges herleiten.

279 §.

Wenn man die Gleichung $CO.CG(A+B+D) = CA^2.A+CB^2.B+CD^2.D$ mit $\frac{sinv.\alpha}{CO}$ multiplicirt: so erhält man $CG.sinv.\alpha(A+B+D) = (CA^2.A+CB^2.B+CD^2.D)\frac{sinv.\alpha}{CO}$. Es sey der Kreisbogen GR beschrieben, und GS horizontal gezogen: so wird $RS = CG.sinv.\alpha$, und wie im vorigen §, $\frac{PQ}{CO^2} = \frac{sinv.\alpha}{CO}$. Wenn man dies in die letzte Gleichung setzt: so wird

$$\frac{RS}{PQ}(A+B+D) = \frac{CA^2}{CO^2}A+\frac{CB^2}{CO^2}B+\frac{CD^2}{CO^2}D.$$

Ist ferner, wie im vor. §, der Puncts O Geschwindigkeit $= u$, und $PQ = \frac{uu}{4g}$: so wird $4gRS(A+B+D)$

$$= \frac{CA^2.u^2}{CO^2}A+\frac{CB^2.u^2}{CO^2}B+\frac{CD^2.u^2}{CO^2}D.$$

Wenn nun a, b, c, eben die Geschwindigkeiten der Puncte A, B, D, wie im vor. §, bedeuten, und man nimmt an, alle Massen in dem Schwerpunct G vereinigt würden mit der Geschwindigkeit $= k$ in die Verticallinie kommen: so ist $k^2 = 4gRS$, und

$$(A+B+D)k^2 = A.a^2+B.b^2+D.c^2.$$

280 §.

Man kann also nach dem Leibnitz-Bernoullischen Sprachgebrauche sagen: die unter einander verbundenen einzelnen Massen A, B, D, erlangen durch

den

den Fall so viele lebendige Kräfte zusammen, daß ihre Summe derjenigen lebendigen Kraft gleich ist, welche die Summe dieser Massen im Schwerpunct vereinigt erlangen würde: und vermöge dieser lebendigen Kraft würde der Schwerpunct so hoch wieder steigen können, so tief er gefallen ist; die einzelnen Gewichte mögen in ihrer Verbindung bleiben, oder nicht. Huygen gründete auf diese Sätze die Theorie vom Mittelpunct des Schwunges, jedoch ohne den Ausdruck lebendige Kraft zu gebrauchen. (Horol. Oscill. P. IV. Hyp. I. & Prop. III. IV.) Joh. Bernoulli aber fand hier den Grundsatz der Erhaltung lebendiger Kräfte; und ob er gleich die Theorie vom Mittelpunct des Schwunges in der Abhandlung Meditatio de natura centri oscillationis Oper. T. II. pag. 168. viel bündiger, als Huygen selbst, bewiesen hatte: so leitete er doch nachher eben diese Theorie, in der Abhandlung: de vera notione virium vivarum Oper. T. III. pag. 239. aus seinem Grundsatze von der Erhaltung lebendiger Kräfte her. Dies hat Bernoulli mit vielen andern Theorien eben so gemacht, und also die Richtigkeit seines Grundsatzes gewissermassen a posteriori, aber doch immer noch aus einer sehr unvollständigen Induction bewiesen, so daß die ganz allgemeine Richtigkeit desselben keinesweges ausser allen Zweifel gesetzt ist. In der That ist der Satz selbst für den jetzigen Zustand der Mechanik ziemlich entbehrlich, da man alles, was aus diesem Grundsatz sonst ist geschlossen worden, nun viel sicherer und bündiger aus andern Gründen herleiten kann, die grösstentheils von Joh. Bernoulli selbst sind erfunden worden.

Der XVIII. Abschnitt.

Vom eccentrischen Stoß, und dem Mittelpunct des Stosses.

281 §.

Bey allen bisherigen Lehren von den Aenderungen, welche die Bewegungen fester Körper durch den Stoß leiden, ist vorausgesetzt worden, daß die Richtung des graden Stosses durch beyder Körper-Schwerpunct gehe. Auch die Untersuchung über den schiefen Stoß (244 §) war auf diesen Umstand eingeschränkt, daß die auf die Berührungs-Ebene senkrechten Geschwindigkeiten der Schwerpuncte, welche eigentlich beym schiefen Stosse nur Aenderungen leiden, in eine und eben dieselbe grade Linie fallen musten. Wenn man nun diese Einschränkung wegläst, und annimmt, daß die Richtung der Bewegung beyder Schwerpuncte zwar noch auf die Berührungs-Ebene senkrecht sey; aber beyde Richtungen nicht in eine grade Linie zusammenfallen: so hat man den Fall des graden und eccentrischen Stosses. Man siehet leicht, daß in diesem Fall der Stoß nicht allein die Bewegung der Schwerpuncte ändre; sondern zugleich verursachen werde, daß entweder einer von beyden Körpern, oder auch alle beyde anfangen, sich um eine gewisse Axe zu drehen, dafern sie anders nicht schon vor dem Stosse sich um eine solche Axe wälzten; da dann in diesem letzten Fall

der Stoß auch diese Umdrehungs-Bewegung der Körper ändern wird.

282 §.

Die Herrn Joh. Bernoulli, Dan. Bernoulli, und Hr. Euler, haben jeder für sich, über die Gesetze dieses eccentrischen Stosses Untersuchungen angestellt, nachdem die Gesetze des centralen Stosses lange bekannt gewesen waren. Weil aber die ganz allgemeine Betrachtung dieses eccentrischen Stosses auf äusserst verwickelte Rechnungen führen würde: so haben die gedachten Geometer nur einige besondre Fälle betrachtet, die auch hier erörtert werden sollen. Damit es nun nicht nöthig sey, die Einschränkungen in der Folge jedesmahl zu wiederholen, die hiebey werden zum Grunde gelegt werden: so wird es nicht undienlich seyn, sie ein für allemahl hieher zu setzen.

1) Die Schwerpuncte zweener Körper, davon einer an den andern stößt, sollen sich in einer Ebene bewegen.

2) Beyde Körper sollen eine solche Gestalt haben, daß eine Axe, die durch ihren Schwerpunct auf diese Ebene senkrecht stehet, eine freye Axe ist.

3) Es soll die Berührung in einem Punct geschehen, der in derselben Ebene liegt, worin sich die Schwerpuncte bewegen, und

4) soll die Berührungs-Ebene auf eben diese Ebene senkrecht seyn, damit die Richtung des Stosses in diese Ebene falle.

5) Diese Ebene soll daher die Ebene des Stosses heissen, und sie kann hier als eine horizontale Ebene betrachtet werden: so wird die Berührungs-Ebene vertical, und eine verticale Axe der Körper eine freye Axe seyn.

Dafern

Dafern nun die Körper vor dem Stoß noch keine Umdrehungs-Bewegung haben: so wird wenigstens einer von diesen Körpern durch den Stoß eine Umdrehung um eine Axe bekommen, die auf die Ebene des Stosses senkrecht ist. Und dafern schon vor dem Stoß einer, oder beyde Körper sich um eine solche Axe drehen; so wird nebst der Geschwindigkeit der Schwerpuncte auch die Umdrehungs-Geschwindigkeit Aenderungen leiden; die Umdrehungs-Axe aber wird bey den angenommenen Voraussetzungen dieselbe bleiben.

283 §.

194 Fig. Einer festen Masse *N* Schwerpunct *B* bewegt sich nach der Richtung *Bβ*, mit der Geschwindigkeit = *b*. Eine andre feste Masse *M*, deren Schwerpunct *A* ist, stößt grade an jene in dem Punct *K* nach der Richtung *Aα*, und des Schwerpuncts *A* Geschwindigkeit ist = *a*. Die Richtungen *Aα* und *Bβ* sind parallel: man sucht die Gesetze dieses Stosses.

Aufl. Wenn GHK und IKL horizontale Schnitte durch die Schwerpuncte A und B vorstellen, und PQ, *pq*, verticale Axen durch diese Schwerpuncte sind: so liegen, vermöge dieser Voraussetzung, (282 §) diese Schnitte in einerley Ebene, und in eben dieser Ebene liegt auch der Berührungspunct K, nebst den Richtungen *Aα*, *Bβ* der Bewegungen beyder Schwerpuncte, und beyde sind auf RS senkrecht, wenn dies die Durchschnittslinie der Berührungs-Ebene, mit der Ebene des Stosses ist. Es sey also EF auf RS senkrecht: so fällt die Richtung des Stosses in EF. Diese Linie sey nun vom Schwerpunct A um den Abstand AE = *e*, vom

Schwer-

Schwerpunct B aber um den Abstand BF $=f$, entfernt. In der Zeit t sey der Punct A in a, und B in b, die Linie BF in bf, und AE in ae gekommen. Wenn nun bc mit BF, und ad mit AE parallel ist: so hat sich in eben der Zeit die Masse M um den Winkel $dae = \psi$ nach KGH, die Masse N aber um den Winkel $cbf = \varphi$, nach KLI gedrehet. Weil nun während des ganzen Stosses nur eine sehr kleine Zeit vergehet: so kann man t nur sehr klein nehmen, und daher werden auch die Winkel dae und cbf nur sehr klein seyn. Eben daher werden ein paar Kreisbogen zwischen ihren Schenkeln mit den Halbmessern ad und bc beschrieben, von de und cf nicht merklich unterschieden seyn, so daß man $dc = e.\psi$, und $cf = f.\varphi$ setzen kann. Sind nun ω und ε der Massen M und N Winkel-Geschwindigkeiten, v und u aber die Geschwindigkeiten ihrer Schwerpuncte am Ende der Zeit t: so werden $e.\omega$ und $f.\varepsilon$ die wahren Geschwindigkeiten der Puncte e und f in eben diesen Augenblick seyn. Die Gewalt, womit die Massen in eben diesem Zeitpunct gegen einander drücken, sey P, die Momente der Massen M und N, gegen die verticalen Axen PQ und pq aber Mkk und Nhh: so hat man

1) $Mdv = -2gPdt$; 2) $Ndu = 2gPdt$.

3) $Mkk.d\omega = 2gPedt$; 4) $Nhh.d\varepsilon = 2gPf.dt$.

(112. 213 §.) Wenn man diese vier Gleichungen so integrirt, daß $\int Pdt = 0$ wird für $t = 0$, und dabey annimmt, daß ε und γ die Winkel-Geschwindigkeiten der Massen M und N vor dem Stoß sind: so erhält man

1) $Mv = Ma - 2g\int Pdt$;

2) $Nu = Nb + 2g\int Pdt$;

3) $Mkk.\omega = Mkk.e + 2ge.\int P dt$;
4) $Nhh.\varepsilon = Nhh.\gamma + 2gff\int P dt$.

Schaft man aus diesen dreyen Gleichungen $2g\int P dt$ weg: so erhält man

I) $M(a-v) = N(u-b)$
II) $(a-v)e = kk(\omega-\varepsilon)$
III) $(u-b)f = hh(\varepsilon-\gamma)$.

Diese Gleichungen gelten für jede Zeit t; also auch für das Ende des Stosses. Im Fall nun die Körper unelastisch sind: so hört die Würkung des Stosses auf, wenn die Geschwindigkeiten der Puncte e und f gleich groß sind. Es haben aber einmahl die Puncte e und f die Geschwindigkeiten v und u, mit den zugehörigen Schwerpuncten gemein. Hiernächst gehet e nach einer der Bewegung des Schwerpuncts A entgegengesetzten Richtung mit der Geschwindigkeit $\varepsilon.\omega$; der Punct f aber mit der Geschwindigkeit $f.\varepsilon$, nach eben der Richtung, wie der Schwerpunct B, fort. Also sind der Puncte e und f Geschwindigkeiten, $v-e.\omega$, und $u+f.\varepsilon$. Beyde müssen bey unelastischen Körpern am Ende des Stosses gleich seyn. Dies giebt

IV) $v-e.\omega = \varepsilon+f.\varepsilon$;

und aus dieser Gleichung mit den vorigen n. I. II. III. zusammengenommen, werden u, v, ε, ω, nach dem 186 A. R. gefunden.

Für die elastischen Körper muß man statt dieser vierten Gleichung eine andre suchen, welche so gefunden wird. Der Abstand EF der beyden Parallelen AE und BF wird während des Stosses kürzer, weil die Körper in einander einen kleinen Eindruck machen. In der Zeit t nun ist ef aus EF geworden, und man hat $ef = EF + Fc + cf - Ed + de$. Wenn man also $Aa = Ed = r$, $Bb = Fc = s$, und $ef = x$ setzt;

setzt; so erhält man $x = EF + s + f.\varphi - r + e.\psi$, und $dx = ds + f.d\varphi - dr + ed\psi$. Weil nun $ds = udt$, $dr = vdt$, $d\varphi = \varepsilon dt$, $d\psi = \omega dt$ ist (106. 154 §) so wird $dx = (u - v + f.\varepsilon + e.\omega)\,dt$, und $dt = \frac{dx}{u - v + f\varepsilon + e.\omega}$. Setzt man diesen Werth statt dt in die vorigen vier Differential-Gleichungen: so werden sie so verändert.

1) $Mudv - Mvdv + Mf\varepsilon dv + Me\omega dv = -2gPdx$

2) $Nudu - Nvdu + Nf\varepsilon du + Ne\omega du = 2gPdx$

3) $(Mk^2 ud\omega - Mk^2 vd\omega + Mk^2 f\varepsilon d\omega + Mk^2 e\omega d\omega) : e = 2gPdx$

4) $(Nh^2 ud\varepsilon - Nh^2 vd\varepsilon + Nh^2 f\varepsilon d\varepsilon + Nh^2 e\omega d\varepsilon) : f = 2gPdx.$

Man multiplicire die erste Gleichung mit $-N$, die zweyte mit M, die dritte mit $\frac{Ne^2}{k^2}$, die vierte mit $\frac{Nf^2}{h^2}$, und bringe sodann alle vier in eine Summe: so ergiebt sich diese Gleichung

$MN(vdv + udu - (udv + vdu) - f(\varepsilon dv + vd\varepsilon) - e(\omega dv + vd\omega) + f(\varepsilon du + ud\varepsilon) + e(\omega du + ud\omega) + ef(\varepsilon d\omega + \omega d\varepsilon) + f^2\varepsilon d\varepsilon + e^2\omega d\omega) =$

$$2g\left(M + N + \frac{Ne^2}{k^2} + \frac{Mf^2}{h^2}\right)Pdx.$$

Diese Gleichung integrirt, giebt:

$MN(\frac{1}{2}vv + \frac{1}{2}uu - u.v - f.\varepsilon.v - e\omega.v + f\varepsilon u + e\omega u + ef\varepsilon\omega + \frac{1}{2}f^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}e^2\omega^2) =$

$$2g\left(M + N + \frac{Ne^2}{k^2} + \frac{Mf^2}{h^2}\right)\int Pdx + C.$$

Nimmt man nun das Integral $\int Pdx$ so, daß es $= o$

wird für $x = EF$: so ist in eben diesem Falle $v = a$, $u = b$, $\omega = e$, $\varepsilon = \gamma$, und es wird $C = MN(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - ab - af\gamma - ae\varepsilon + bf\gamma + be\varepsilon + ef\varepsilon\gamma + ef\varepsilon\gamma + \frac{1}{2}f^2\gamma^2 + e^2.\varepsilon^2.)$ Man setze diesen Werth statt C, und multiplicire die ganze Gleichung mit $\frac{2}{MN}$: so findet man

$$(u + f\varepsilon + e\omega - v)^2 = (a - b - e\varepsilon - f\gamma)^2 + 4g\left(M + N + \frac{Ne^2}{k^2} + \frac{Mf^2}{h^2}\right)\int P dx$$

Wenn nun x aufs neue $= EF$ ist: so ist der Stoß bey elastischen Körpern zu Ende, und $\int P dx = 0$. Folglich kommt nun zu den obigen Gleichungen n. I. II. III. noch folgende:

IV) $u + f\varepsilon + e\omega - v = a - b - e\varepsilon - f\gamma$

daraus dann v, u, ω und ε für das Ende des Stoßes gefunden werden.

284 §.

Um nun hievon die Anwendung auf beyde Arten von Körpern zu machen, betrachte man zuerst die Gleichungen

II) $e(a - v) = k^2(\omega - \varepsilon)$

III) $f(u - b) = h^2(\varepsilon - \gamma)$.

Man multiplicire die erste mit eh^2, die zweyte mit fk^2, und addire beyde, so erhält man:

$$h^2e^2(a - v) + k^2f^2(u - b) = h^2k^2(e\omega + f\varepsilon) - h^2k^2(e\varepsilon + f\gamma).$$

Nun giebt die Gleichung n. IV. für unelastische Körper $e\omega + f\varepsilon = v - u$, und dieser Werth statt $e\omega + f\varepsilon$ gesetzt, giebt

$$h^2e^2(a - v) + k^2f^2(u - b) = h^2k^2(v - u) - h^2k^2(e\varepsilon + f\gamma).$$

End-

Endlich setze man aus der Gleichung n. I.

$$a - v = \frac{N(u-b)}{M}, \text{ und } v = a - \frac{N(u-b)}{M},$$

so findet man

$$\left(\frac{h^2e^2N}{M} + k^2f^2 + \frac{h^2k^2N}{M} + h^2k^2\right)u =$$

$$\left(\frac{h^2e^2N}{M} + k^2f^2 + \frac{h^2k^2N}{M}\right)b + h^2k^2(a - e\varepsilon - f\gamma),$$

$$\text{also } u = b + \frac{h^2k^2(a-b-e\varepsilon-f\gamma)}{h^2e^2N:M + k^2f^2 + h^2k^2N:M + h^2k^2},$$

$$\text{oder 1) } u = b + \frac{Mh^2k^2(a-b-e\varepsilon-f\gamma)}{(M+N)h^2k^2 + Mk^2f^2 + Nh^2e^2}.$$

$$\text{Folglich 2) } v = a - \frac{Nh^2k^2(a-b-e\varepsilon-f\gamma)}{(M+N)h^2k^2 + Mk^2f^2 + Nh^2e^2}.$$

Aber die Gleichungen n. II. und n. III. geben

$$\omega = \varepsilon + \frac{e(a-v)}{k^2}, \text{ und } g = \gamma + \frac{f(u-b)}{h^2}.$$

Daher hat man:

$$3)\ g = \gamma + \frac{Mk^2f(a-b-e\varepsilon-f\gamma)}{(M+N)h^2k^2 + Mk^2f^2 + Nh^2e^2}$$

$$4)\ \omega = \varepsilon + \frac{Nh^2e(a-b-e\varepsilon-f\gamma)}{(M+N)h^2k^2 + Mk^2f^2 + Nh^2e^2}.$$

Wenn man statt der Gleichung $u = v + fg + e\omega$, die für elastische Körper gefundene $u + fg + e\omega - v = a - b - e\varepsilon - f\gamma$ gebraucht, also $fg + e\omega = v - u + a - b - e\varepsilon - f\gamma$ setzt: so erhält man

$$h^2e^2(a-v)+k^2f(u-b)=h^2k^2(v-u)+h^2k^2(a-b-2e\varepsilon-2f\gamma),$$

und wenn man der Kürze wegen

$$\frac{a-b-e\varepsilon-f\gamma}{(M+N)h^2k^2+Mk^2f^2+Nh^2e^2}=K$$

setzt: so ergiebt die übrige Rechnung

1) $u=b+2Mh^2k^2\times K$
2) $v=a-2Nh^2k^2\times K$
3) $\varepsilon=\gamma+2Mk^2f\times K$
4) $\omega=\varepsilon+2Nh^2e\times K$

Vergleicht man diese vier Gleichungen mit den vorigen, welche für unelastische Körper gelten: so erhellet, daß auch hier wie beym centralen Stosse (230 §) die Aenderungen sowohl der Geschwindigkeiten der Schwerpuncte, als auch der Winkel-Geschwindigkeiten bey elastischen Körpern doppelt so groß, als bey unelastischen Körpern seyn. Man kann statt des Factors 2, überhaupt den Buchstab λ schreiben, und dabey zum Grunde setzen, daß entweder $\lambda=1$, oder $\lambda=2$ seyn müsse, nachdem von unelastischen Körpern die Rede ist. Auf solche Art können aus diesen Gleichungen allgemeine Schlüsse gezogen werden, die man denn leicht auf elastische oder unelastische Körper insbesondre anwendet.

285 §.

Obgleich die bisher aufgelöste Aufgabe des 283 § wegen der dabey zum Grunde liegenden Einschränkungen (282 §) eigentlich nicht alle Fälle des excentrischen Stosses unter sich begreift: so gehört doch eine ziemliche Menge besondrer Fälle hieher, bey welchen übrigens die Einschränkungen des 282 §. statt haben. Man kann aber nun sehr leicht die all-

allgemeinen Formeln auf besondre hieher gehörige Fälle anwenden, dafern nur jedesmahl die gegebenen Grössen so bestimmt werden, wie es die besondern Umstände eines jeden einzelnen Falles erfordern. Die vornehmsten hieher gehörigen Fälle sind folgende.

I) Die obige Rechnung setzt voraus, daß beyde Schwerpuncte sich nach einerley Richtung bewegen. Wenn also N der Masse entgegen liefe: so müste man allenthalben $-b$ statt $+b$ schreiben.

II) Wenn eine der Massen M und N, oder alle beyde sich vor dem Stosse nicht nach KGH, und KLI; sondern auf entgegengesetzte Art drehen: so muß man ε oder γ, oder alle beyde, negativ nehmen.

III) Wenn eine, oder beyde Massen, sich vor dem Stosse noch gar nicht drehen; so muß man ε oder γ, oder alle beyde $= o$ setzen. Und dafern die Masse N vor dem Stosse völlig ruhet: so muß zugleich $b = o$ gesetzt werden.

IV) Wenn die Richtung des Stosses EF durch A gehet; also der Stoß in Absicht der Masse M central ist: so wird $e = o$, und man hat in diesem Falle

$$u = b + \frac{\lambda M h^2 (a - b - f\gamma)}{(M+N)h^2 + Mff}$$

$$v = a - \frac{\lambda N h^2 (a - b - f\gamma)}{(M+N)h^2 + Mf^2}$$

$$\omega = \varepsilon$$

$$\varepsilon = \gamma + \frac{\lambda M f (a - b - f\gamma)}{(M+N)h^2 + Mf^2},$$

da dann $\omega = \varepsilon = o$ ist, wenn sich M vor dem Stoß nicht drehet.

V.) Geht die Richtung des Stoßes durch B: so ist der Stoß in Absicht der Masse N central, und man hat $f = o$; also

$$u = b + \frac{\lambda M k k (a - b - e\varepsilon)}{(M+N) k k + N e^2}$$

$$v = a - \frac{\lambda N k k (a - b - e\varepsilon)}{(M+N) k k + N e^2}$$

$$\omega = \varepsilon + \frac{\lambda N e (a - b - e\varepsilon)}{(M+N) k k + N e^2}$$

$\varepsilon = \gamma$, oder auch $\varepsilon = o$, wenn sich N vor dem Stoß nicht drehet.

VI.) Wenn in eben diesem Fall N völlig ruhet, so ist auch $b = o$, und

$$u = \frac{\lambda M k k (a - e\varepsilon)}{(M+N) k k + N e^2}$$

$$v = a - \frac{\lambda N k k (a - e\varepsilon)}{(M+N) k k + N e^2}$$

$$\omega = \varepsilon + \frac{\lambda N e (a - e\varepsilon)}{(M+N) k k + N e^2}.$$

VII.) Ist nun zugleich N ein völlig unbewegliches Hinderniß: so kann man $N = \infty$ setzen (246 §), und man erhält

$$u = o$$

$$v = a - \frac{\lambda k k (a - e\varepsilon)}{k k + e e}$$

$$\omega = \varepsilon + \frac{\lambda e (a - e\varepsilon)}{k k + e e}.$$

VIII)

VIII.) Wenn beyde Körper central an einander stossen, und sich vor dem Stoß nicht wälzen: so ist $e = f = \varepsilon = \gamma = 0$, und man hat

$$u = b + \frac{\lambda M a}{M+N}\,;\quad v = a - \frac{\lambda N a}{M+N}\,,$$

wie im 230 §. Uebrigens aber $\omega = 8 = 0$.

286 §.

Geht demnach die Masse M mit paralleler Bewegung fort, und stößt bey K an ein völlig unbewegliches Hinderniß: so ist auch $\varepsilon = 0$, und man hat aus dem vor. §. n. VII.

$$v = a - \frac{\lambda a k^2}{ee+kk}\,,$$

$$\text{und}\quad \omega = \frac{\lambda a e}{ee+kk}$$

Dasjenige, was der Schwerpunct der Masse M an seiner Geschwindigkeit verliert, ist $= \frac{\lambda a k^2}{kk+ee} =$

$\lambda a - \frac{\lambda a e^2}{k^2+e^2}$, und dieser Verlust ist allemahl kleiner, als λa, so lange e nicht $= v$ ist. Daher ist dieser Verlust am grösten, wenn $e = 0$; also der Stoß central ist. Weil nun in eben diesem Fall die Masse M auch gar keine Winkel-Bewegung bekommt, sondern durch den Stoß völlig zur Ruhe gebracht wird: so ist in diesem Fall die Würkung des Stosses am grösten. Der Masse M wird alle ihre Bewegung entzogen, da sie gegentheils in jedem andern Fall einen Theil ihrer Bewegung behält. Dafern die Masse N, woran M bey K mit

paralleler Bewegung so stößt, daß die Richtung des Stosses durch der Masse N Schwerpunct B gehet, zwar ruhet, aber nicht völlig unbeweglich ist: so wird

$$u = \frac{\lambda a M kk}{(M+N)kk+Nee},$$

$$v = a - \frac{\lambda a N kk}{(M+N)kk+Nee},$$

$$\omega = \varepsilon + \frac{\lambda N a e}{(M+N)kk+Nee}.$$

Demnach ist die Geschwindigkeit u, welche der Masse N durch den Stoß mitgetheilt wird, ebenfalls allemahl kleiner, als in dem Fall, wenn $e = 0$, folglich der Stoß auch in Absicht der Masse M central ist. Wäre der Stoß zwar in Absicht der Masse M, aber nicht in Absicht der Masse N, central: so hätte man

$$u = \frac{\lambda a M h^2}{(M+N)h^2+Mff},$$

$$v = a - \frac{\lambda a N h^2}{(M+N)h^2+Mff},$$

$$\varepsilon = \gamma + \frac{\lambda M a f}{(M+N)h^2+Mff}.$$

und M würde in keinem Fall so viel von seiner Bewegung verlieren, als in dem Fall, wenn auch $f = 0$ ist.

287 §.

Wenn man sich durch den Schwerpunct einer Masse M, die mit paralleler Bewegung grade gegen

ein

ein unbewegliches Hinderniß stößt, eine auf der Richtung des Stosses senkrechte Ebene vorstellt: so heist der Punct dieser Ebene der Mittelpunct des Stosses, (centrum percussionis) durch welchen die Richtung des Stosses durchgehen muß, damit der Stoß am stärksten sey. Stößt die Masse M mit paralleler Bewegung gegen eine andre N, so daß der Stoß in Absicht der Masse M central ist; und man legt durch den Schwerpunct der Masse N eine Ebene auf die Richtung des Stosses senkrecht: so ist ebenfalls derjenige Punct derselben der Mittelpunct des Stosses, durch welchen die Richtung des stärksten Stosses gehet.

Aus dem vor. § ergiebt sich unmittelbar, daß dieser Punct mit dem Schwerpuncte einerley sey, sowol wenn nach dem Mittelpunct des Stosses einer Masse M gefragt wird, die mit paralleler Bewegung gegen ein unbewegliches Hinderniß stößt: als auch in dem Fall, wenn die Rede von dem Mittelpunct des Stosses einer ruhenden, aber völlig frey beweglichen Masse N ist, woran eine andre M mit paralleler Bewegung so stößt, daß der Stoß in Absicht der Masse M central ist.

Wenn aber im letzten Fall die Masse N nicht völlig frey beweglich ist, sondern ein paar Puncte dieser Masse so unterstützt sind, daß sich N nicht anders, als um eine grade Linie durch diese Puncte, wie um eine feste Axe drehen kann; so ist der Mittelpunct des Stosses mit dem Schwerpunct dieser Masse nicht einerley, wie sich aus dem folgenden mit mehrern ergeben wird.

288 §.

195 Fig. Eine Masse *M*, deren Schwerpunct *A* ist, stößt in dem Punct *K* mit der Geschwindigkeit *a* nach der Richtung *Aα* grade an eine andre Masse *N*, die sich mit der Winkel-Geschwindigkeit γ gegen *KLI* zu um die feste Axe *PQ* bewegt. Der Stoß ist in Absicht der Masse *M* central, und die Richtung des Stosses liegt in einer auf diese Axe senkrechten Ebene, um den Abstand $BF = f$ von der Axe entfernt: man sucht die Winkel-Geschwindigkeit der Masse *N*, nebst der wahren Geschwindigkeit der Masse *M*, nach dem Stosse.

Aufl. In der Zeit *t*, die nur sehr klein angenommen werden muß, sey A nach *a*, die Linie BF aber in die Lage *Bf* gekommen. Ferner sey am Ende der Zeit *t* der Masse M Geschwindigkeit $= v$, der Masse N Winkel-Geschwindigkeit $= \varepsilon$: so ist des Puncts *f* Geschwindigkeit $= f\varepsilon$. Setzt man nun das Moment der Masse N gegen die Axe $PQ = Nhh$, und die Gewalt, womit beyde Massen gegen einander drücken $= P$: so hat man

$$dv = -\frac{2gP'dt}{M}, \text{ und } d\varepsilon = \frac{2gPfdt}{Nhh},$$

und beyde Gleichungen integrirt, geben $Mv = Ma - 2g\int P dt$, $Nhh\varepsilon = Nhh.\gamma + 2gf\int P dt$. Schaft man $2g\int P dt$ aus beyden Gleichungen weg: so erhält man

$$Ma - Mv = (Nhh.\varepsilon - Nhh.\gamma) : f.$$

Im Fall nun die Körper unelastisch sind, so hört die Würkung des Stosses auf, wenn der Puncte *a* und *f* Geschwindigkeiten gleich sind; folglich, wenn $v = f.\varepsilon$

$= f.g$ ist. Diese Gleichung mit der vorigen zwischen v und g zusammen genommen, giebt die Auflösung der Aufgabe für unelastische Körper. Man erhält nemlich

$$Mff(a - fg) = Nhh(fg - f\gamma).$$

Daraus folgt $fg = v = \frac{Maff + Nhhf\gamma}{Mf^2 + Nh^2}$,

$$\text{und } g = \frac{Maf + Nhh\gamma}{Mf^2 + Nh^2},$$

$$\text{oder } fg = v = f\gamma + \frac{Maff - Mf^3\gamma}{Mff + Nhh} =$$

$$a - \frac{Nhh(a - f\gamma)}{Mf^2 + Nh^2},$$

$$\text{und } g = \gamma + \frac{Mf(a - f\gamma)}{Mff + Nhh}.$$

Sind M und N elastische Körper: so setze man $Aa = r$, den Winkel $FBf = \psi$, also $Ff = f\psi$, und $af = x$; so hat man $af = AF + Ff - Aa$, oder $x = AF + f\psi - r$. Folglich $dx = fd\psi - dr$. Es ist aber $d\psi = gdt$, und $dr = vdt$; also wird $dx = (fg - v)dt$, und $dt = \frac{dx}{fg - v}$. Dies setze man in die obigen beyden Differential-Gleichungen: so erhält man

$$M(fg - v)dv = -2gPdx$$
$$(Nhh(fg - v)dg) : f = 2gPdx.$$

Man multiplicire die erste mit $-N$, die zweyte mit $\frac{Mff}{hh}$, so wird

$$MN(vdv$$

$$MN(vdv - fgdv) = 2gN\Gamma dx$$

$$MN(f^2 gdg - fvdg) = \frac{2gMf^2}{h^2}\Gamma dx$$

Beydes addirt, giebt

$$MN(vdv + f^2 gdg - f(gdv + vdg)) = 2g\left(N + \frac{Mf^2}{h^2}\right)\Gamma dx.$$

Das Integral hievon ist

$$MN\left(\tfrac{1}{2}vv + \tfrac{1}{2}ffgg - f.v.g\right) = 2g\left(N + \frac{Mf^2}{h^2}\right)\int\Gamma dx + C.$$

Wenn man nun Γdx so integrirt, daß $\int\Gamma dx = 0$ wird, für $x = AF$: so ist zugleich $v = a$, und $g = \gamma$, und man erhält die Gleichung

$$MN\left(\tfrac{1}{2}vv + \tfrac{1}{2}f^2 g^2 - f.v.g\right) = MN\left(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}f^2\gamma^2 - fa\gamma\right) + 2g\left(N + \frac{Mf^2}{h^2}\right)\int\Gamma dx.$$

Nun ist für elastische Körper der Stoß geendigt, wenn zum zweytenmal $x = AF$, also $\int\Gamma dx = 0$ ist; und diese Voraussetzung giebt

$$f^2.gg - 2fv.g + v^2 = aa - 2fa\gamma + f^2\gamma^2,$$

also $fg - v = a - f\gamma$, und $fg = a + v - f\gamma$.

Dies setze man in die Gleichung

$$M(a - v) = Nhh(g - \gamma) : f,$$

nachdem sie vorher mit ff multiplicirt worden: so erhält man

$$Mff(a - v) = Nhh(a + v - 2f\gamma),$$

und daraus folgt

$$(Mff + Nhh)v = Mffa - Nhh(a - 2f\gamma),$$

und

$$\text{und } v = a - \frac{2Nhh(a - f\gamma)}{Mff + Nhh},$$

$$\text{also } f\varepsilon = f\gamma + \frac{2Mff(a - f\gamma)}{Mff + Nhh},$$

$$\text{und } \varepsilon = \gamma + \frac{2Mf(a - f\gamma)}{Mff + Nhh}.$$

Man kann demnach, wie oben,

$$v = a - \frac{\lambda Nhh(a - f\gamma)}{Mff + Nhh},$$

$$\varepsilon = \gamma + \frac{\lambda Mf(a - f\gamma)}{Mff + Nhh}$$

setzen, da dann $\lambda = 2$, oder $= 1$ seyn muß, nachdem M und N entweder elastische, oder unelastische Massen sind.

289 §.

Man wendet diese allgemeine Auflösung leicht auf die besondren hieher gehörigen Fälle an, wovon folgende fürnemlich zu merken sind.

I) Wenn die Masse N vor dem Stosse ruhet, so ist $\gamma = 0$, und man hat

$$v = a - \frac{\lambda N.hh.a}{Mff + Nhh},$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda Mf.a}{Mff + Nhh}.$$

Die letzte Gleichung ergiebt, daß ε zweymahl $= 0$ werde; einmahl, wenn $f = 0$ ist, und überdem auch, wenn $f = \infty$ wird. Anfangs wächst ε, wenn f wächst; aber wenn f bis zu einer gewissen Grenze gewachsen ist, so nimmt ε wieder ab.

ab. Es muß also eine gewisse Entfernung f der Richtung des Stosses von der Axe geben, bey welcher die Masse N durch den Stoß die gröste Winkel-Geschwindigkeit bekommt.

II) Wenn die Masse N sich vor dem Stosse nicht gegen KLI zu, sondern auf entgegengesetzte Art, gegen ILK zu drehet: so ist γ negativ, also

$$v = a - \frac{\lambda N h h (a + f\gamma)}{Mff + Nhh},$$

$$\varepsilon = -\gamma + \frac{\lambda M f (a + f\gamma)}{Mff + Nhh}.$$

III) Wenn eben diese Voraussetzung bleibt, und überdem M vor dem Stosse ruhet; so wird $a = 0$; also

$$v = -\frac{\lambda N h h f \gamma}{Mff + Nhh},$$

$$\varepsilon = -\gamma + \frac{\lambda M f f \gamma}{Mff + Nhh}.$$

Das Zeichen (—) vor dem Ausdruck, der v bestimmt, zeigt an, daß M sich nach dem Stosse nicht nach Aa, sondern nach entgegengesetzter Richtung Ab bewege. Wenn man also nun diese Richtung Ab, und die Umdrehungsbewegung nach LKI als positiv betrachtet; so kann man

$$v = \frac{\lambda N h h f \gamma}{Mff + Nhh},$$

$$\varepsilon = \gamma - \frac{\lambda M f f \gamma}{Mff + Nhh}$$ setzen. Die Gleichung für v ergiebt wiederum, daß nicht allein $v = 0$ werde, wenn $f = 0$ ist, sondern auch, wenn $f = \infty$ wird; daß v anfangs wachse, wenn f wächst, aber

nur

nur bis auf eine gewisse Grenze, und sodann wieder abnehme. Daher muß es eine gewisse Entfernung f geben, bey welcher die Masse M durch den Stoß die grösste Geschwindigkeit bekommt.

290 §.

Hiebey ist nun noch zu bemerken, daß v und ε bey einerley Entfernung der Richtung des Stosses einerley bleiben, wenn die übrigen data einerley sind. Es sey BCEF eine Ebene durch die Umdrehungsaxe, auf die Richtung des Stosses AF senkrecht. Durch F sey EF mit BC parallel gezogen: so sind v und ε immer einerley; es mag F in der Parallele EF liegen, wo man will, dafern nur allemahl der Stoß ein grader Stoß, und f einerley ist. Soll nun derjenige Punct in einer durch die Axe auf die Richtung des Stosses senkrechten Ebene, der Mittelpunct des Stosses heissen, durch welchen die Richtung des Stosses durchgehen muß, damit ε oder v am grösten werde, so wird dieser Punct nicht völlig bestimmt; sondern nur der Abstand einer mit der Axe parallelen graden Linie von dieser Axe, worin nun jeder Punct dieselbe Eigenschaft hat. Gemeiniglich pflegte man aber hiebey vorauszusetzen, daß die Ebene des Stosses zugleich durch den Schwerpunct G der Masse N durchgehe, und auf einer Ebene BCDH durch die Axe und den Schwerpunct G der Masse N senkrecht sey; wie wenn die Masse M bey K senkrecht anstiesse, und KF in K′F′ fiele. Sucht man nun BF oder CF′ für den Fall, wenn ε oder v am grösten ist, und nennt F′ den Mittelpunct des Stosses: so liegt derselbe allemahl in einer durch den Schwerpunct G der Masse N auf der Umdrehungsaxe senkrechten graden

graden Linie, und man hat diesen Mittelpunct, wenn man CF' so groß nimmt, daß

$$\varepsilon = \frac{\lambda M f a}{M f f + N h h} \text{ (289 §. n. I.)}$$

oder $$v = \frac{\lambda N h h f \gamma}{M f f + N h h} \text{ (289 §. n. III.)}$$

am grösten wird.

291 §.

Den Mittelpunct des Stosses in der kurz vorher angezeigten Bedeutung zu finden, wenn eine Masse *M* mit paralleler Bewegung an eine andre *N* grade so stößt, daß der Stoß in Absicht der Masse *M* central ist; die Masse *N* aber sich nicht anders, als um die feste Axe *PQ* drehen kann, vorausgesetzt, daß die Richtung des Stosses *AF*, in einer durch den Schwerpunct *G* auf die Axe senkrechten Ebene liege, und *CG* senkrecht schneide.

Aufl. Man muß suchen, wie groß *f* genommen werden müsse, damit die für ε oder *v* am Ende des vor. §. bemerkten Werthe am grösten werden. Demnach darf man in beyden Fällen nur suchen, wie groß *f* genommen werden müsse, damit

$$\frac{f}{M f f + N h h} = \frac{1}{N h h} \cdot \frac{f}{\frac{M f f}{N h h} + 1} =$$

$$\frac{1}{N h h} \cdot \frac{1}{\frac{M f}{N h h} + \frac{1}{f}}, \text{ am grösten werde.}$$

Man setze der Kürze wegen $\frac{M}{N h h} = A$: so erhellet, daß

daß jeder dieser Ausdrücke am grösten werde, wenn $\frac{1}{Af+\frac{1}{f}}$ am grösten wird. Da nun der Zehler dieses Bruchs sich nicht ändert, so wird der Bruch selbst am grösten, wenn sein Nenner am kleinsten wird. Es ist aber sein Nenner am kleinsten, wenn man $f=\frac{1}{\sqrt{A}}$ setzt. Denn in dieser Voraussetzung wird $Af+\frac{1}{f}=2\sqrt{A}$, und man mag $f=\frac{1}{\sqrt{A}}+e$; oder $f=\frac{1}{\sqrt{A}}-e$ setzen: so wird allemahl $Af+\frac{1}{f}>2\sqrt{A}$. Die Voraussetzung $f=\frac{1}{\sqrt{A}}+e$, giebt $Af+\frac{1}{f}=\sqrt{A}+eA+\frac{\sqrt{A}}{1+e\sqrt{A}}$, und man findet durch die Division $\frac{\sqrt{A}}{1+e\sqrt{A}}=\sqrt{A}-eA+\frac{e^2A\sqrt{A}}{1+e\sqrt{A}}$. Folglich $Af-\frac{1}{f}=2\sqrt{A}+\frac{e^2A\sqrt{A}}{1+e\sqrt{A}}$.

Die Voraussetzung $f=\frac{1}{\sqrt{A}}-e$, giebt eben so $Af+\frac{1}{f}=2\sqrt{A}+\frac{e^2A\sqrt{A}}{1-e\sqrt{A}}$. Weil nun e nicht grösser, als $\frac{1}{\sqrt{A}}$ genommen werden darf, und $f=0$ wäre, wenn $e=\frac{1}{\sqrt{A}}$ genommen wür-

de: so ist allemahl $e < \frac{1}{\sqrt{A}}$: folglich $e\sqrt{A} < 1$; und $1 - e\sqrt{\Lambda}$ positiv, also auch in diesem Fall $Af + \frac{1}{f} > 2\sqrt{A}$. Folglich ist $Af + \frac{1}{f}$ am kleinsten, und $\frac{1}{Af + \frac{1}{f}}$, am grösten, wenn $f = \frac{1}{\sqrt{A}}$; oder $f = \sqrt{\frac{Nhh}{M}}$ ist. Daher sind bey eben diesem Werth von f, auch g und v am grösten, und wenn man $CF' = \sqrt{\frac{Nhh}{M}}$ nimmt, so ist F' der Mittelpunct des Stosses in der Bedeutung des 290 §.

Man setze das Moment der Masse N in Ansehung einer durch den Schwerpunct G mit PQ parallelen Axe $= Nkk$, und $GC = c$: so ist $Nhh = N(cc + kk)$, (164 §) und $CF' = \sqrt{\frac{N(cc + kk)}{M}}$. Daher ist CF allemahl grösser als CG, so lange $M < N + \frac{Nkk}{cc}$, und wenn $M = N + \frac{Nkk}{cc}$ ist; so ist der Mittelpunct des Stosses mit dem Schwerpunct einerley.

292 §.

Wenn die Masse *N* sich gegen *LHI* zu drehet, und *M* nach der Richtung *AF'* ihr entgegen stößt, beyde Massen aber unelastisch sind: den Punct *F* zu finden, durch welchen die Rich-

Richtung des Stosses durchgehen müsse, damit beyde Massen nach dem Stosse ruhen.

Aufl. Bey dieser Voraussetzung ist γ negativ, und man hat

$$v = a - \frac{Nhh(a+f\gamma)}{Mff+Nhh} \text{ (289 §. n. II.)}$$

Dieser Werth $= o$ gesetzt, giebt $Mffa = Nhh.f\gamma$, und $f = \frac{Nhh}{Ma}\gamma$. Eben dies giebt die Gleichung

$$f\delta = v = -f\gamma + \frac{Mff(a+f\gamma)}{Mff+Nhh} = o.$$

293 §.

Aus dem 57 § ist bekannt, daß Ma die Grösse der Bewegung der Masse M sey, und man findet aus der eben hergeleiteten Gleichung

$$Ma = \frac{Nhh}{f}\gamma = \frac{Nhh}{ff}.f\gamma.$$

Weil nun beyde Bewegungen einander aufheben, wenn $Ma = \frac{Nhh}{ff}.f\gamma$ ist; so könnte man verführt werden, zu glauben, daß $\frac{Nhh}{ff}.f\gamma$ die Grösse der Bewegung der Masse N ausdrücke, weil keine andre entgegengesetzte Bewegungen, als solche, die gleich groß sind, einander aufheben können. Eben dies könnte noch der Umstand zu bestätigen scheinen, weil die Bewegung des Puncts F eben so während des Stosses geändert wird, als wenn eine Masse $= \frac{Nhh}{ff}$ in diesem Puncte vereini-

niget wäre (160 §). Die Geschwindigkeit dieser Masse vor dem Stosse wäre also $f\gamma$, und $\frac{Nhh}{ff} \cdot f\gamma$ das Product aus dieser Masse in ihre Geschwindigkeit.

Allein man muß hiebey erwägen, daß nicht die ganze Bewegung der Masse N um ihre Axe bey jeder willkührlich angenommenen Entfernung f allein durch den Stoß aufgehalten werde, indem die Axe allemahl zugleich eine gewisse Gewalt leidet. Daher würde der Masse N nicht ihre ganze Bewegung entzogen werden, wenn die Axe nicht gehalten würde, wie hier vorausgesetzt wird; es wäre dann, daß die Axe bey dem Stosse gar keinen Druck litte. Soll dies erfolgen; folglich die ganze Bewegung der Masse N durch den Stoß aufgehoben werden: so muß vermöge des 220 § die Axe PQ in der Masse N eine solche Lage haben, daß die Momente aller Schwungkräfte, womit sie die Axe um C zu drehen streben, einander aufheben. — Und überdem muß $f = \frac{hh}{CG}$ genommen werden. Dies in die Gleichung $Ma = \frac{Nhh}{f}\gamma$ gesetzt, giebt $Ma = N.CG.\gamma$.

Also ist $Ma =$ dem Product aus der Masse N in die Geschwindigkeit ihres Schwerpuncts. Man weiß aber, daß in einem System mehrer Massen allemahl dies Product einerley sey mit der Summe der Bewegungen aller einzelnen Massen. Folglich ist auch hier $N.CG.\gamma$ die wahre Grösse der Bewegung der Masse N.

294 §.

Wenn die unelastische Masse N, indem sie sich um die feste Axe PQ drehet, grade gegen ein unbewegliches Hinderniß bey K' anschlägt: so wird zwar ihre Schwungbewegung allemahl völlig aufgehoben; allein K leidet nur alsdenn die ganze Stärke des Stosses, wenn $f = \frac{hh}{CG}$ ist. Denn in diesem Fall hält der Widerstand bey K die ganze Grösse der Bewegung der Masse N auf, und es ist so viel, als ob die ganze Masse N mit der Geschwindigkeit des Schwerpuncts CG. γ central dagegen anstiesse. In allen andern Fällen hält der Widerstand bey K nur einen Theil der Bewegung, die feste Axe aber den übrigen Theil auf. Soll nun derjenige Punct der Ebene GPQ der Mittelpunct des Stosses heissen, durch welchen die Richtung des Stosses durchgehen muß, damit der Widerstand bey K' die gesamte Bewegung der Masse N aufhalte: so wird der Abstand der Mittelpuncte des Stosses und des Schwunges (176 §) von der Umdrehungs-Axe durch einerley Rechnung gefunden. Beyde fallen indessen nicht allemahl in einerley Punct zusammen, weil man gewöhnlich annimmt, daß der Mittelpunct des Schwunges in CG liege. Dafern die Momente der Schwungkräfte, womit sie die Axe um C drehen würden, einander nicht aufheben: so liegt der Mittelpunct des Stosses nicht in CG (220 §). Es ergiebt sich also hieraus, in welchem Verstande man sagen könne, daß beyde Mittelpuncte einerley seyn.

295 §.

Wallis, der zuerst den Ausdruck: Mittelpunct des Stosses, gebraucht hat, (Mechan. Cap. XI.

Prop. XV.) erklärt sich so darüber, er sey der Punct des stärksten Stosses (punctum percussionis maximæ). Es ist gleich viel, ob man durch den Punct des stärksten Stosses einer Masse N, die mit paralleler Bewegung fortgehet, denjenigen versteht, durch welchen die Richtung des Stosses durchgehet, wenn ein unbewegliches Hinderniß ihre völlige Bewegung aufhält; oder ob derjenige verstanden wird, durch welchen die Richtung des Stosses durchgehen muß, wenn sie einer andern beweglichen Masse M, in deren Absicht der Stoß central angenommen wird, die gröste Geschwindigkeit mittheilen soll. Er ist in beyden Fällen mit dem Schwerpuncte einerley (287 §). Allein, wenn die Masse N nicht mit paralleler Bewegung fortgehet, sondern sich um eine feste Axe drehet: so wird der Punct dieser Masse, durch welchen die Richtung dieses Stosses an ein unbewegliches Hinderniß geht, wenn ihre völlige Bewegung gehemmet wird, nicht allemahl eben derselbe seyn, durch welchen die Richtung des Stosses an eine andre bewegliche Masse gehen muß, wenn der letztern die gröste Geschwindigkeit mitgetheilt werden soll. Wallis nahm den Ausdruck: punctum percussionis maximæ, oder centrum percussionis, in dem zuerst erwähnten Sinn. Er betrachtete die Producte aus den Massen aller einzelnen körperlichen Theilchen des sich schwingenden Körpers in ihre Geschwindigkeiten, als so viele einzelne Pressungen in dem Augenblick des Stosses; und den Punct des unbeweglichen Widerstandes, woran der Körper anschlägt, als die Unterlage. Wenn er nun suchte, wie weit diese Unterlage vom Bewegungs-Punct entfernt seyn müsse, damit alles im Gleichge-

wichte bleibe: so fand er für diese Entfernung eben den Ausdruck, den Huygen für den Mittelpunct des Schwunges gefunden hatte.

Um dies kurz zu übersehen, betrachte man die Puncte K, M, N der graden Linie CN, die sich um C mit der Winkel-Geschwindigkeit γ kreisförmig schwingt, als kleine Massen, die mit den Geschwindigkeiten $CK.\gamma$, $CM.\gamma$, $CN.\gamma$, nach Richtungen, die auf CN senkrecht sind, fortgehen: so drücken die Producte $\gamma CK.K$, $\gamma CM.M$, $\gamma CN.N$, die Grösse ihrer Bewegungen aus. Werden nun diese als Pressungen betrachtet, und nach dem 42 § St. ihre mittlere Richtung gesucht: so muß man die Summe der Momente dieser Pressungen durch die Summe der Pressungen selbst dividiren. Geht demnach ihre mittlere Richtung durch F, so erhält man

$$CF = \frac{\gamma(CK^2.K + CM^2.M + CN^2.N)}{\gamma(CK.K + CM.M + CN.N)} = \frac{CK^2.K + CM^2.M + CN^2.N}{CG(M+N+K)},$$

wenn G der Massen M, N, K Schwerpunct ist. Dieser Ausdruck ist einerley mit demjenigen, welcher den Mittelpunct des Schwunges giebt. 158 Fig.

Wallis (l. c. Schol. p. 681.) schloß hieraus, daß der Mittelpunct des Stosses vom Mittelpuncte des Schwunges nicht verschieden sey, wovon Huygens Erfindung nicht lange vorher bekannt geworden war, unn Stone hieß sie hiedurch verleiten, beyde Ausdrücke als völlig gleichgültige anzusehen. (Analyse des infinement petits comprenant le calcul integral Sect. VII. pag. 131.) wogegen Joh. Bernoulli in seinen Remarques sur le calcul integ. de Msr. *Stone*

(Oper. T. IV. n. 170. p. 180. sq.) die nöthigen Erinnerungen macht. Indessen scheint Joh. Bernoulli in dem Begriffe selbst, was den Mittelpunct des Stosses betrift, mit Wallis einig zu seyn. Eben denselben Begrif behält Jac. Bernoulli bey, in der Abhandlung: Demonstration du principe de Mſr. *Huygens* touchant le centre de balancement, & de l'identité de ce centre avec celui de percussion. (Oper. *Jac. Bernoulli* T. II. n. C. p. 951.) Er behauptet noch, daß ein und eben derselbe Punct allemahl zugleich der Mittelpunct des Stosses und des Schwunges sey. Seine Schlüsse sind den vorhin angeführten Wallischen ähnlich; und dies rührt daher, weil er nur eine körperliche Ebene betrachtet, die sich um eine auf ihr senkrechte Axe schwingt, wie im 212 §.

296 §.

Die meisten übrigen Schriftsteller kommen hierinnen mit dem Wallis überein. Hr. Euler aber erklärt sich über den Begrif vom Mittelpunct des Stosses so, wie derselbe im 290sten § festgesetzt ist. (Robins erläuterte Artillerie 182 S.) und seine Formul komt mit derjenigen überein, die im 291 § aus diesem Begrif ist hergeleitet worden. Es war nemlich $CF' = \sqrt{\frac{Nhh}{M}}$. Ist nun G der Schwerpunct und O der Mittelpunct des Schwunges: so wird $hh = CG.CO$; also $CF' = \frac{\sqrt{CG.CO.N}}{\sqrt{M}}$, welche Hrn. Eulers Formul ist, wenn man g statt CG, f statt CO, P statt N, p statt M schreibt. Der Abstand dieses Puncts von der Axe hängt also nicht

allein

allein von der Grösse und Gestalt der Masse N, sondern zugleich von dem Verhältnisse zwischen N und M ab. Er fällt mit dem Mittelpuncte des Schwunges zusammen, wenn $M = \frac{CG}{CO} N$, mit dem Schwerpuncte aber, wenn $M = \frac{CO}{CG} N$ ist.

297 §.

Wenn man die allgemeinen Auflösungen der Aufgabe des 283 und 288 § vergleicht, so ergiebt sich, daß die im 274 § angeführte Regel: Die Grösse der Bewegung bleibt nach dem Stoß so groß, als sie vor dem Stoß war, auch beym eccentrischen Stoß gelte. Es ist nemlich im 283 §, $Ma + Nb = Mv + Nu$. Eben dies bleibt auch 288 § richtig, wenn der Stoß so erfolgt, daß die Masse N, die sich nicht anders, als um die feste Axe PQ drehen kann, den ganzen Stoß leidet, ohne die Axe zu drücken. Es ist nemlich in dem Fall $\frac{hh}{CG} = f$, und dies in die Gleichung $M(a-v) = N.hh(\varepsilon-\gamma):f$ gesetzt, giebt $M(a-v) = N.CG(\varepsilon-\gamma)$: also bleibt $Ma + N.CG.\gamma = M.v + N.CG.\varepsilon$. Man muß aber diesen Satz von Erhaltung derselben Grösse der Bewegung nicht anders, als in der im 274 § erwähnten Bedeutung nehmen. Es bleibt einerley Summe der Bewegung vor und nach dem Stosse; aber das Wort: Summe, muß in dem allgemeinen Verstande des 2 § der A. R. genommen werden, und es ist eigentlich die arithmetische Differenz zu verstehen, wenn die Bewegungen einander entgegen gesetzt sind. Daher kann man auch die Richtigkeit

dieses Satzes alsdenn nicht in Zweifel ziehen, wenn ein paar Massen vor dem Stoß mit paralleler Bewegung fortgehen, durch den eccentrischen Stoß aber zugleich eine Bewegung um Axen bekommen, die durch ihren Schwerpunct gehen. Die Grösse der Bewegung einer jeden Masse, die sich zugleich drehet, indem ihr Schwerpunct fortgehet, ist das Product dieser Masse in die Geschwindigkeit ihres Schwerpuncts (195 §), und die Grösse ihrer Schwung-Bewegung ist = 0. Die Bewegungen der einzelnen Massen sind einander zur Hälfte entgegen gesetzt, und ihre Summe, so wie das Wort hier verstanden werden muß, ist = 0.

298 §.

Daher fällt der Beweis für das Leibnitz-Bernoullische Kräftenmaaß weg, den Hr. Euler (ob er gleich in neuern Aufsätzen, die oben im 261 §. angeführt sind, dieser Theorie nicht günstig ist) Comment. Acad. Petrop. T. IX. führet, im 24 § der Abhandlung de communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientium. Indessen wird auch beym eccentrischen Stosse einerley Summe der lebendigen Kräfte erhalten, wenn das Product einer Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit lebendige Kraft heissen soll, und die an einander stossenden Körper elastisch sind. Es ist nemlich $Nhh.\gamma\gamma$, die lebendige Kraft einer Masse N, die sich um die Axe PQ, mit der Geschwindigkeit γ drehet, wenn ihr Moment der Trägheit = Nhh ist. Denn es sey dM ein verschwindendes Theilchen der Masse N, in der Entfernung r, von der Umdrehungsaxe: so ist dessen lebendige Kraft = $\gamma\gamma rrdM$, und die

Summe aller $= \gamma\gamma ssrrdM = Nhh.\gamma\gamma$. Demnach ist im 283 § die Summe aller lebendigen Kräfte nach dem Stosse $Mvv + Mkk.\omega\omega + Nuu + Nhh.\gamma\gamma$, und wenn man statt v, ω, u, γ die für elastische Körper dort gefundenen Werthe setzt: so wird diese Summe $= Maa + Nkk.\varepsilon\varepsilon + Nbb + Nhh.\gamma\gamma$, welches die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoß ist.

Der XIX. Abschnitt.

Vom Widerstande, den feste Körper leiden, die sich im flüßigen bewegen.

299 §.

Ein fester Körper, der sich in einer flüßigen Materie bewegt, dergleichen z. E. die Luft und das Wasser ist, kann nicht fortgehen, ohne die ihm im Wege liegenden Theilchen derselben Materie in Bewegung zu setzen. Aber eben hiedurch muß seine Geschwindigkeit in jedem Augenblick vermindert werden. Die Theilchen der flüßigen Materie widerstehen der Bewegung des in derselben fortgehenden festen Körpers wegen ihrer Trägheit so, wie ein fester Körper der Bewegung eines andern, der an ihn stößt, widerstehet. Je stärker dieser Widerstand ist, desto mehr wird in einer gewissen Zeit dem festen Körper von seiner Geschwindigkeit entzogen; und

es

es ist so viel, als wenn eine bewegende Kraft nach einer Richtung auf den Körper würkte, die der Richtung seiner Bewegung entgegengesetzt ist. Die Grösse dieses Widerstandes hängt von verschiedenen Umständen ab. Einmahl von der Dichtigkeit der flüßigen Materie selbst. Er ist desto grösser, je grösser diese Dichtigkeit ist; und ein Körper leidet z. E. im Wasser mehr Widerstand, als in der Luft. Diese Stärke des Widerstandes richtet sich ferner nach der Grösse und Gestalt der Oberfläche des festen Körpers; sie richtet sich endlich auch nach der Geschwindigkeit des letztern, und man siehet leicht, daß bey einer grössern Geschwindigkeit der Widerstand gröſſer sey, als bey einer geringern.

300 §.

196 Fig. Ein grades Prisma, oder ein grader Cylinder *LMML*, dessen Höhe *LM* und Grundfläche *MM* ist, bewegt sich in einer flüßigen Masse mit paralleler Bewegung, nach einer auf der Grundfläche *MM* senkrechten Richtung *Mm*, mit der Geschwindigkeit *c*: man sucht die Kraft des Widerstandes.

Aufl. Die vorderste Grundfläche MM sey in der Zeit *t* von AA nach MM gekommen: so hat sie den Weg AM $=$ *x* zurück gelegt, und eben so weit ist der Schwerpunct in dieser Zeit fortgerückt. Es sey der Inhalt der Grundfläche MM $=$ *bb*, und die Höhe LM $=$ *a*; die Dichtigkeit des Prisma sey $=$ *m*, so ist sein Gewicht $=$ *mabb*. Wenn nun in der Zeit Δt der Körper um das Stück Mm $=$ Δx weiter fortrückt; so treibt er eine Masse des flüßigen fort, die den Raum $bb\Delta x$ ausfüllte, und wenn der

flüßigen Masse Dichtigkeit $= n$ ist: so wird das Gewicht der aus dem Wege getriebenen Masse $= nbb\Delta x$. Wäre nun diese Masse ein fester Körper: so wäre nach den oben erwiesenen Gesetzen des Stosses die Geschwindigkeit, welche das anstossende Prisma durch den Stoß verliert, entweder $= \frac{nbbc\Delta x}{mabb + nbb\Delta x}$, oder $= \frac{2nbbc\Delta x}{mabb + nbb\Delta x}$, (230 §) nachdem entweder die Gesetze des Stosses unelastischer; oder elastischer Körper hier gelten müssen. Dies wäre also dasjenige, um welches die Geschwindigkeit c des festen Körpers, in der Zeit Δt abnimmt. Wenn man also diesen Verlust der Geschwindigkeit $= \Delta c$ setzt: so wäre $\Delta c = -\frac{\lambda nbbc\Delta x}{mabb + nbb\Delta x}$, und entweder $\lambda = 1$, oder $\lambda = 2$, nachdem die Gesetze des Stosses unelastischer, oder elastischer Massen gelten müssen. Diese Gleichung gründet sich auf Voraussetzungen, die der Wahrheit nicht völlig gemäß, aber desto weniger unrichtig sind, je kleiner Δx genommen wird. Wenn man sie so ausdrückt $\frac{\Delta c}{\Delta x} = -\frac{\lambda nbbc}{mabb + nbb\Delta x}$, so nähert sie sich der Wahrheit desto mehr, je kleiner Δx genommen wird, und der letzte unter diesen Werthen muß die Wahrheit völlig erreichen, weil man annehmen kann, daß die Theilchen des letzten Prisma, dessen Höhe Δx verschwindet, auf einmahl, wie die Theile eines festen Körpers, in Bewegung gesetzt werden. Man erhält also $\frac{dc}{dx} = -\frac{\lambda nbbc}{mabb}$; oder $dc = -\frac{\lambda nbbc}{mabb}\,dx$. Weil nun

allemahl $dx = cdt$ ist (113 §): so wird $dc = -\frac{\lambda nbbcc}{mabb}dt$. Es ist aber die Richtung des Widerstandes auf die Fläche MM senkrecht; und weil dieser Widerstand auf jeden Punct der Fläche MM gleich stark ist: so gehet seine mittlere Richtung durch des Prisma LMML Schwerpunct. Ist also der gesammte Druck des Widerstandes $= R$: so ist es so viel, als wenn eine Kraft $= R$ am Schwerpunct des Prisma LMML angebracht wäre nach einer Richtung, die seiner Bewegung grade entgegengesetzt ist; und die daher rührende Verzögerung der Bewegung bestimmt die Gleichung $dc = -\frac{2gRdt}{mabb}$ (112 §). Beyde Werthe von dc gleich gesetzt, geben $\lambda nbbcc = 2gR$; also $R = \frac{\lambda nbbcc}{2g}$. Wenn nun v die der Geschwindigkeit c zugehörige Höhe ist, so hat man $v = \frac{cc}{4g}$, und $2v = \frac{cc}{2g}$. Daher wird $R = 2\lambda nbb.v$, und dieser Ausdruck zeiget, daß der Widerstand so groß sey, als das Gewicht einer aus der flüßigen Masse bestehenden graden Säule, deren Grundfläche bb der vordern Fläche des festen Körpers gleich; die Höhe aber, entweder viermahl, oder zweymahl (nachdem $\lambda = 2$, oder $\lambda = 1$ seyn muß) so groß, als die Höhe, welche der Geschwindigkeit zugehört, womit der feste Körper fortgehet.

301 §.

Bey dieser Auflösung bleibt es einmahl zweifelhaft, ob $\lambda = 1$, oder $= 2$ gesetzt werden muß; und

und fürs zweyte wird dabey vorausgesetzt, daß der feste Körper jedesmahl die folgenden Theilchen der flüßigen Masse in völliger Ruhe antreffe. Man muß aber bedenken, daß die Theilchen des flüßigen, welche schon von dem festen Körper in Bewegung gesetzt worden sind, auch in dem Zustande der folgenden Theilchen eine Veränderung verursachen, und diese gleichfalls vorwärts treiben. Daher würkt der Körper auf sie nur mit seiner relativen Geschwindigkeit. Ueberdem weichen die Theilchen der flüßigen Masse seitwärts aus, und es werden nicht alle diejenigen, welche vor der vordern Fläche des festen Körpers liegen, unmittelbar von derselben fortgestossen. Daher muß der Widerstand kleiner seyn, als ihn die vorige Rechnung giebt, man mag λ aus den Gesetzen des Stosses elastischer, oder unelastischer Körper bestimmen. Deswegen hat man mit der Theorie Versuche verbinden müssen, um die Stärke des Widerstandes richtiger auszumachen, und diese haben gelehret, daß der Widerstand dem Gewicht einer solchen Säule des flüßigen, auf der Grundfläche *MM*, gleich sey, deren Höhe nur so groß als die der Geschwindigkeit *c* zugehörige Höhe ist, wenigstens alsdenn, wenn *c* nicht sehr groß ist. Also wird $R = nbbv = \frac{nbbcc}{4g}$, und $dc = -\frac{nbbcc}{2mabb}dt$.

302 §.

Der Widerstand ist also dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, weil *v* diesem Quadrat proportional ist, wenn die Grösse der Vorderfläche des Körpers, und die Dichtigkeit der flüßigen

gen Masse, einerley bleibt. Daher kann der feste Körper im flüßigen nicht gleichförmig fortgehen; seine Geschwindigkeit nimmt beständig ab, und eben deswegen kann auch der Widerstand nicht beständig einerley bleiben, sondern er ist eine veränderliche Kraft, die von der Geschwindigkeit selbst abhängt.

Uebrigens erhellet, daß dieser Widerstand eben derselbige sey, wenn gleich der feste Körper nicht eben die Gestalt eines Prisma, oder Cylinders hat, dafern anders n, bb und cc einerley bleiben. Jene Voraussetzung ist hier eben deswegen nur angenommen worden, weil in dem Fall die mittlere Richtung des Widerstandes durch den Schwerpunct gehet, und die parallele Bewegung nicht gestört wird. In Fällen, wo die mittlere Richtung nicht durch den Schwerpunct gehet, wird der Körper wegen des Widerstandes auch eine Umdrehung um sich selbst bekommen.

303 §.

197 Fig. Es sey LMN ein gleichschenklichter Keil (142 § St.), und γ sein Schwerpunct. Die Figur stelle denjenigen Querschnitt des Keils durch seinen Schwerpunct vor, der mit den dreyseitigen Grundflächen parallel ist: so werden G und g die Schwerpuncte der beyden gleichen Seitenflächen seyn, wenn $LG = Ng = \frac{1}{2}LM = \frac{1}{2}NM$ genommen wird; LN aber wird die Durchschnittslinie mit derjenigen Seitenfläche seyn, welche in der Statik der Rücken heist. Man nehme $LA = \frac{1}{2}LN$, und ziehe AM: so ist AM auf LN senkrecht, und geht durch den Schwerpunct des Keils γ. Der Keil gehe mit paralleler Bewegung nach der Richtung MA fort: An jedem der Puncte G und g sey eine Kraft $= P$, nach einer

auf

auf *LM* und *MN* senkrechten Richtung angebracht: man sucht die Geschwindigkeit, womit der Keil in jedem Augenblick fortgehet.

Aufl. Die Richtungen RG und *rg* der an den Puncten G und *g* angebrachten Kräfte schneiden einander in F, einem Punct in AM. Man verlängere eben diese Richtungen nach B und C, nehme FB = FC, so fällt die Diagonale FQ des Parallelogramms BFCQ mit MF in grader Linie, weil BFQ = ½BFC = MF*g* wird, und FQ ist die mittlere Richtung der an G und *g* angebrachten Kräfte. Die mittlere Kraft selbst wird = $\frac{P \sin 2BFQ}{\sin BFQ}$. (55 §. St.)

= 2P cos BFQ = 2P.cos ALM. = 2P sin AML. Ist also der halbe Keil-Winkel AML = α, so wird die mittlere Kraft = 2P sinα: und weil ihre Richtung durch den Schwerpunct gehet; so wird die parallele Bewegung des Keils nicht gestöhrt. Ist nun seine Masse = M, so wird die Bewegung seines Schwerpuncts, und zugleich des ganzen Keils, durch diese Gleichung bestimmt: $dc = \frac{4gP \sin\alpha}{M} dt$, und man erhält $c = \frac{4g \sin\alpha}{M} \int P dt + C$.

Wenn der Keil nicht nach der Richtung MA, sondern nach der grade entgegengesetzten Richtung AM fortgienge; so wäre die Richtung der mittlern Kraft FQ der Bewegung entgegengesetzt, und man hätte

$dc = -\frac{4gP \sin\alpha}{M} dt$, also $c = C - \frac{4g \sin\alpha}{M} \int P dt$

304 §.

197 Fig. Der Keil *LMN* gehe in einer flüßigen Masse, nach der Richtung *AM*, mit paralleler Bewegung fort; ihre Dichtigkeit sey = *n*, und jede der vordern Flächen des Keils *LM* und *MN* = *bb*: man sucht die Grösse und Richtung des Widerstandes.

Aufl. Wenn die Spitze M des Keils in der Zeit *t* durch den Weg DM = *x*, fortgegangen ist, so ist die vordere Fläche LM in eben der Zeit nach der auf ihr senkrechten Richtung GR um DE fortgerückt. Es sey am Ende der Zeit *t* die Geschwindigkeit des Keils = *c* = GH, und man zerlege sie nach den Richtungen GR und GM. Ist nun der Anstoßwinkel HGM = φ, und die Geschwindigkeit nach der Richtung GR = *e*; so ist der Widerstand nach eben dieser Richtung = $\frac{nbb}{4g} ee$ (302 §.), und $e = c \sin\varphi$. Setzt man also den Widerstand nach der Richtung RG = R; so wird R = $\frac{nbb}{4g} cc \sin\varphi^2$. Ist nun auch *gr* auf MN senkrecht: so wird der Widerstand nach der Richtung *rg* gegen die Fläche MN gleichfalls = R = $\frac{nbb}{4g} cc \sin\varphi^2$. Nun schneiden die Richtungen RG und *rg* einander in F, wie im vor. §, und geben eine Kraft nach der Richtung FQ durch des Keils Schwerpunct, die = 2R $\sin\varphi$ ist, weil AML = α (303 §) = HGM = φ. Hat demnach der Keil für sich eine parallele Bewegung; so wird sie wegen des Widerstandes nicht gestöhrt werden. Nur wird die

die Geschwindigkeit so abnehmen, als wenn am Schwerpunct γ des Keils eine Kraft $= \frac{nbb}{2g} cc \sin\varphi$, der Richtung der Bewegung entgegen, angebracht wäre. Es ist nemlich hier $\varphi =$ dem beständigen Winkel AML, und dieser Anstoßwinkel ändert sich deswegen nicht, weil der Keil mit paralleler Bewegung fortgehet.

305 §.

Wenn nur der halbe Keil ALM nach der Richtung AM; oder sonst ein andrer Körper, der eine ebene Vorderfläche hat, im flüßigen nach einer Richtung GH fortgehet, die gegen die Vorderfläche LM unter einem schiefen Winkel $AGM = \varphi$ geneigt ist: so wird die flüßige Masse nach einer auf LM senkrechten Richtung der Bewegung mit einer Kraft $= \frac{nbb}{4g} cc \sin\varphi^2$ widerstehen, wo die Buchstaben die vorige Bedeutung haben. Wenn aber die mittlere Richtung RG nicht durch den Schwerpunct des festen Körpers gehet, so wird der Körper eine Bewegung um sich selbst bekommen, da dann nicht allein c, sondern auch φ eine veränderliche Grösse wird, so daß nun der Widerstand dem Product aus dem Quadrat der Geschwindigkeit in das Quadrat des Anstoßwinkels proportional ist.

306 §.

Es sey ABCDEFH eine gleichseitige Pyramide, (wie im 579 §. G.) also die Grundfläche BCDEFH ein reguläres Polygon, AK ihre Höhe: so liegt ihr Schwerpunct G in AK, und K ist der Mittelpunct des um die Grundfläche zu beschreibenden Kreises. 198 Fig.

Man halbire BC bey L, und ziehe AL und KL: so sind beyde auf BC senkrecht, und in AL liegt des Dreyecks ABC Schwerpunct. Demnach ist ALK der Ebene ABC Neigungswinkel gegen die Grundfläche, und folglich diese Ebene ALK auf ABC senkrecht. Jede grade Linie *gh* also durch einen Punct *g* in AL auf die Ebene ABC senkrecht gesetzt, liegt in der Ebene ALK, und schneidet verlängert AK, weil LAK $< 90°$ ist. Dies thut also auch eine Linie *gh* durch den Schwerpunct *g* des Dreyecks ABC auf dessen Ebene senkrecht gesetzt.

Wenn man durch den Schwerpunct einer jeden Seitenfläche auf ihrer Ebene eine senkrechte Linie setzt: so schneiden diese einander alle in einem und eben demselben Punct *h* der Linie AK.

Ist nun *gh* die Richtung einer an *g* angebrachten Kraft P, und sind an den Schwerpuncten der übrigen Seitenflächen gleichfalls nach senkrechten Richtungen eben so grosse Kräfte angebracht: so fällt die mittlere Richtung aller dieser Kräfte in *h*K, wie man aus dem 153 §. St. leicht herleitet.

307 §.

198 Fig. Die gleichseitige Pyramide *ABCDEFH* hat eine grade Anzahl Seitenflächen, und sie geht mit paralleler Bewegung in einer flüßigen Masse, deren Dichtigkeit $= \delta$ ist, nach der Richtung *KA* fort: man sucht die Grösse des Widerstandes.

Aufl. Die Richtung des Widerstandes ist auf jede Seitenfläche senkrecht, und die mittlere Richtung *gh* des Widerstandes auf jede Seitenfläche ABC geht durch ihren Schwerpunct *g*. Ist nun *ga* mit KA parallel: so ist $Aga = LAK = \varphi$

$= \varphi$ der Anstoßwinkel. Ist ferner die Geschwindigkeit der Pyramide $= c$: so ist der Widerstand auf jede Seitenfläche $= \frac{\delta . Dr . ABC . cc . \sin\varphi^2}{4g}$,

und die Richtung dieses Widerstandes schneidet AK in h (306 §). Man setze diese Kraft $=$ P, und zerlege sie in zwo andre, nach gr auf AK senkrecht, und nach gs mit AK parallel: so wird die Kraft nach $gs = P . \sin . hgr$, und die Kraft nach $gr = P . \cos hgr$. Aber $hgr = gAr = Aga = \varphi$; also die Kraft $gs = P \sin\varphi$, die Kraft $gr = P . \cos\varphi$. Weil nun die Anzahl der Seiten eine grade Anzahl ist; so liegt der Seitenlinie BC der Grundfläche eine andre FE gegen über, die mit BC parallel ist. Die erweiterte Ebene AKL halbirt diese Linie FE in l, und das Dreyeck AFE in Al. Sie geht also durch die mittlere Richtung des Widerstandes auf die Fläche AFE, welches γh ist. Dieser Widerstand ist ebenfalls $=$ P, und zerlegt sich in zwo Kräfte $\gamma r = P \cos\varphi$, und $\gamma\sigma = P \sin\varphi$, auf AK senkrecht, und damit parallel, da dann gr und γr in grader Linie liegen: und weil die Kräfte nach diesen Richtungen einander entgegengesetzt sind, so heben sie sich auf. Aus den beyden andern aber nach gs und $\gamma\sigma$ entsteht die mittlere Kraft $= 2P \sin\varphi$ nach der Richtung rK durch den Schwerpunct der Pyramide. Eben die Bewandniß hat es mit jeden zwoen andern Seitenflächen, die einander gegenüber liegen. Ist demnach die Anzahl dieser Seitenflächen $= 2n$, so ist der gesammte Widerstand nach der Richtung rK

$$= 2nP \sin\varphi = \frac{2n . \delta . Dr . ABC . cc . \sin\varphi^3}{4g}.$$

308 §.

198 Fig. Eine Ebene mit der Grundfläche BCDEFH parallel gelegt schneide die Seitenfläche ABC in MN, und AK in Q, so ist auch MN mit BC parallel, und diese Ebene schneidet eine Pyramide ab, deren Höhe AQ ist. Der Theil des Widerstandes, den diese Pyramide leidet, ist $= \frac{2n.\delta.\mathrm{Dr.AMN}.cc.\sin\varphi^3}{4g}$.

Man setze AP $= s$, MN $= z$: so ist der Inhalt des Dreyecks AMN $= \int z ds$ (114 §). Wenn man also den Widerstand auf die abgeschnittene Pyramide $=$ R setzt: so ist R $= \frac{2.\delta.cc\sin\varphi^3 \int n z ds}{4g}$.

Ziehet man nun MQ, so ist dies der Halbmesser des Kreises um die Grundfläche der abgeschnittenen Pyramide. Diesen setze man $= y$, so ist der halbe Umfang des erwähnten Kreises $= \pi y$, und der zur Sehne MN gehörige Bogen $= \frac{1}{n}\pi y$. Daher wird MN $= z =$ chord $\frac{1}{n}\pi y$ (466 §. G.) und

$$\mathrm{R} = \frac{1}{4g}.2\delta.cc\,\mathrm{sin}\varphi^3 \int n\,\mathrm{chord}\,\frac{1}{n}\pi y\,ds,$$

oder auch $\mathrm{R} = \frac{1}{4g} 2\delta cc\,\mathrm{sin}\varphi^3\, n\,\mathrm{chord}\,\frac{1}{n}\pi \int y ds.$

Dieser Ausdruck ist allemahl richtig, wie groß auch n genommen wird. Aber ein grader Kegel, dessen Grundfläche der mit dem Halbmesser MQ $= y$ um die Grundfläche der abgeschnittenen Pyramide beschriebene Kreis, und dessen Höhe AQ ist, kann als die Grenze aller auf diese Art in demselben beschrie-

schriebenen Pyramiden betrachtet werden (88 §. St.) Man setze demnach $n = \infty$, so erhält man den Widerstand, den der grade Kegel leidet, wenn er sich nach der Richtung QA bewegt. Er wird demnach

$$= \frac{1}{4g} 2\delta cc \sin\varphi^3 . \infty \text{ chord } \frac{1}{\infty} \pi s y ds,$$ da

dann AP $= s =$ AM $=$ der Seite des Kegels,

und ∞ chord $\frac{1}{\infty} \pi = \pi$ wird (466 §. G.) Folglich ist der Widerstand $= \frac{1}{2g} \delta cc \sin\varphi^3 \pi s y ds$,

wenn s die Seite des Kegels, y den Halbmesser der Grundfläche, und φ den Winkel der Seite des Kegels mit seiner Axe bedeutet; der Kegel aber nach der Richtung seiner Axe QA fortgehet.

309 §.

Es sey MAN ein Bogen eines grösten Kreises einer Kugel, deren Mittelpunct C, und Halbmesser $CM = r$ ist. Es sey $MA = AN$, so daß CA auf der Sehne MN in P senkrecht ist. Die Kugel bewege sich nach der Richtung CA in einer flüßigen Masse, deren Dichtigkeit δ ist, mit der Geschwindigkeit c: man sucht den Widerstand. 199 Fig.

Aufl. Man ziehe durch M und N die Tangenten MT und NT. Diese werden sich in einem Punct T der Axe CA schneiden. Nun drückt auf jeden Punct NL des Bogens AM ein Theil des Widerstandes nach der Richtung RM auf der Tangente senkrecht. Diese Kraft nach RM zerlegt sich in zwo andre, davon die eine mit AP parallel, die andre auf

AP senkrecht ist. Diesem Punct M stehet ein andrer N in der Ebene MAN grade gegenüber, worauf ein eben so grosser Theil des Widerstandes drückt, der sich gleichfalls in zwo Kräfte zerlegt, wovon eine mit AP parallel, die andre auf AP senkrecht ist. Die beyden auf AP senkrechten Kräfte heben einander auf, und die mittlere Richtung der beyden übrigen fällt in AP. Man schliest hieraus leicht, daß die mittlere Richtung des gesammten Widerstandes in AP falle, weil dieselben Schlüsse für jeden Schnitt durch AC gelten. Deswegen darf man nur seine Grösse suchen.

Es stelle in solcher Absicht das Dreyeck MTN den Schnitt durch die Axe eines senkrechten Kegels vor, dessen Oberfläche die Kugel in dem Kreise berührt, dessen Halbmesser PM ist. Der Widerstand, den dieser Kegel leiden würde, sey $= Q$, und der gesuchte Widerstand für das Segment der Kugel, dessen Höhe AP ist, sey $= R$. Ferner sey der Bogen $AM = S$, und $TM = s$, $AP = x$, $PM = y$. Es wachse $AP = x$ um das Stück $Pp = \Delta x$, und durch p sey mn mit MN, MQ aber mit AP parallel. Wenn nun mn den Bogen AM in μ, und TM in m schneidet; so wird $QM = \Delta y$, $M\mu = \Delta S$, $Mm = \Delta s = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$. Der Theil des Widerstandes, der auf das Stück der Kegelfläche $mMNn$, drückt $= \Delta Q$, derjenige aber, den die Zone $\mu MN\nu$ der Kugelfläche leidet, $= \Delta R$. Je kleiner Pp genommen wird, desto mehr nähern sich die Zonen des Kegels und der Kugel einander, und werden gleich, wenn Δx verschwindet, und in eben diesem Fall ist zugleich der Anstoß Winkel φ für beyde

einer-

einerley. Also muß $\frac{dR}{dQ} = 1$, oder $dR = dQ$ werden, nur mit dem Unterscheid, daß für dQ der Winkel φ von beständiger Grösse bleibt, x mag sich wie man will ändern, für dR aber eben dieser Winkel veränderlich, und eine Function von x ist. In eben diesem Fall werden ds und dS einerley, nemlich $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, da dann dieser Ausdruck, wie im 257 §, aus der Gleichung für den Kreis gefunden wird. Man erhält demnach $dR = dQ$ (308 §) $= \frac{1}{2g} \delta cc\, \pi y ds \sin\varphi^3$. Die Sehne des Bogens $M\mu$ schneide PT in S: so ist $\text{tang} MSP = \frac{Q\mu}{QM} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nimmt $Pp = \Delta x$ ab, so nähert sich der Winkel MSP dem Winkel MTP; und wenn Δx verschwindet, so wird MSP = MTP. Daher erhält man

$\text{tang} MTP = \frac{dy}{dx} = \text{tg}\varphi$; also ist $\cot\varphi = \frac{dx}{dy}$; $\text{cosec}\varphi = \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy} = \frac{ds}{dy}$,

und $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$. Diesen Werth von $\sin\varphi$ setze man in dem gefundenen Ausdruck für dR: so wird $dR = \frac{1}{2g} \delta cc\, \pi . \frac{ydy^3}{ds^2}$, und $R = \frac{1}{2} g \delta cc\, \pi \int \frac{ydy^3}{ds^2}$.

Nun hat man für den Kreis die Gleichung $yg = 2rx - xx$ (83 §). Man setze aber der bequemern Rechnung wegen $CP = r - x = z$: so wird $yg = rr - zz$, und $-dx = dz$. Dies giebt $ydy = -zdz$,

zdz, und $dz = -\frac{ydy}{z} = -\frac{ydy}{\sqrt{(rr-yy)}}$; al-

so $dy^2 + dz^2 = dy^2 + dx^2 = ds^2 = dy^2 + \frac{y^2dy^2}{rr-yy}$,

oder $ds^2 = \frac{rrdy^2}{rr-yy}$. Hieraus folgt $\frac{ydy^3}{ds^2} =$

$\frac{(rr-yy)ydy}{rr} = ydy - \frac{y^3dy}{rr}$; also $\int\frac{ydy^3}{ds^2} =$

$\frac{1}{2}y^2 - \frac{y4}{4rr} + C$. Daher ist der Widerstand

$R = \frac{1}{2g}\delta cc\pi\left(\frac{1}{2}y - \frac{y^4}{4rr} + C\right)$. Es muß aber

$R = o$ seyn, wenn $x = o$, also auch $y = o$ ist. Dies giebt $C = o$; folglich ist der gesuchte Widerstand auf das Kugelstück

$$MAN = \frac{1}{2g}\delta cc\pi\left(\frac{1}{2}y - \frac{y4}{4rr}\right).$$

Wenn nun gleich die ganze Kugel im flüßigen fortgehet; so erhellet, daß sich der Widerstand doch nur auf die vorderste Halbkugel erstrecke. Also muß man $x = AC = r$, folglich $y = r$ setzen, um ihn ganz zu haben; und man erhält

$$R = \frac{1}{2g}\delta cc\pi\left(\frac{1}{2}rr - \frac{1}{4}rr\right) = \frac{1}{8g}\delta cc\pi rr.$$

Der Widerstand gegen die Kugel ist also nur halb so groß, als der Widerstand gegen die Grundfläche eines graden Cylinders, der sich nach der Richtung seiner Axe bewegt, wenn seine Grundfläche dem grösten Kreise

der

der Kugel gleich ist, und beyde Körper mit gleicher Geschwindigkeit in einerley flüßigen Masse fortgehen. Es ist nemlich die Fläche dieses grösten Kreises $= \pi rr$, und der Widerstand gegen diese Fläche $= \frac{1}{4g} . d\pi rrcc$.

310 §.

Wenn gleich die Kugel, indem ihr Schwerpunct vorwärts rückt, sich zugleich um sich selbst drehet: so bleibt doch dieser Widerstand allemahl nur dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, ohne etwa noch von dem Anstoßwinkel abzuhängen. Denn, da das was den Widerstand leidet, allemahl die Fläche einer Halbkugel ist, die Kugel mag sich, wie man will, drehen: so bleibt allemahl $R = \frac{1}{8g} d\pi rrcc$ und die Richtung des Widerstandes geht durch den Mittelpunct der Kugel; folglich durch ihren Schwerpunct, wenn die Masse der Kugel gleichartig ist. In diesem Fall also, und in allen Fällen der parallelen Bewegung, da der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, und der Anstoßwinkel beständig einerley ist, wird der Ausdruck für den Widerstand unter dieser allgemeinen Formul begriffen seyn $R = Ecc$: so, daß E eine beständige Grösse ist, die von der Gestalt und Grösse des festen Körpers, und zugleich von der Dichtigkeit der flüßigen Masse abhängt. Weil nun die Aenderung der Bewegung, die von dem Widerstande herrührt, durch diese Gleichung ausgedrückt wird: $dc = -\frac{2gR}{M} dt$;

so

so kann man überhaupt $dc = -\frac{2g.E.cc}{M}dt$ setzen, da dann E in jedem besondern Falle aus den eben angeführten Stücken bestimmt werden muß.

311 §.

In dieser Gleichung ist nun $\frac{Ecc}{M}$ die Verzögerung des Widerstandes in dem Verstande des 54 §, so wie g die Verzögerung der Schwere ist bey vertical aufwärts geworfenen Körpern (39 §). Man nehme an, es werde $Ecc = M$ (wo M das Gewicht des festen Körpers ist,) wenn $c = k$ wird; so verzögert der Widerstand in diesem Augenblick die Bewegung eben so, wie die natürliche Schwere die Bewegung eines aufwärts geworfenen Körpers, und k ist diejenige Geschwindigkeit, für welche der Widerstand dem Gewicht des festen Körpers gleich wird. Man hat also vermöge dieser Voraussetzung $Ekk = M$, und $kk = \frac{M}{E}$, oder $k = \sqrt{\frac{M}{E}}$, so daß dieser Werth von k in jedem besondern Fall leicht gefunden wird. Setzt man nun den Werth Ekk statt M in die Gleichung $dc = -\frac{2g.E.cc}{M}dt$, so erhält man $dc = -\frac{2g.cc}{kk}dt$.

312 §.

Will man mit Herrn Euler die Geschwindigkeit durch die Quadratwurzel aus der ihr zugehörigen Höhe ausdrücken (117 §); so muß man $g = \frac{1}{4}$ setzen,

gen, und man hat $dc = -\frac{1}{2}\frac{cc}{kk}dt$. Ist nun v die der Geschwindigkeit c, und K die der Geschwindigkeit k zugehörige Höhe; so erhält man $v = cc$, $K = kk$; also $dc = -\frac{1}{2}\frac{v}{K}dt$. Dies mit $2c$ multiplicirt, giebt $2cdc = -\frac{v}{K}cdt$; oder $dv = -\frac{v}{K}dx$, weil $cdt = dx$ ist (113 §), wenn x den Weg bedeutet, den der feste Körper in der Zeit t zurücklegt. Diese Gleichung braucht Hr. Euler Mech. T. I. 387 §. u. f. dem Herr Kästner folgt (Anf. der höhern Mechanik 69 S. u. f.). Hr. Euler nennt K den Exponenten des Widerstandes. Dieser ist also die derjenigen Geschwindigkeit zugehörige Höhe, für welche der Widerstand dem Gewicht des festen Körpers gleich wird. Ob nun gleich bey solchen Bewegungen, die in der Natur vorgehen, der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit, und keiner andern Potenz derselben proportional befunden wird: so kan man doch zur Uebung in der Integralrechnung überhaupt annehmen, es sey der Widerstand einer Potenz der Ordnung $2m$ der Geschwindigkeit, also einer Potenz der Ordnung m der ihr zugehörigen Höhe proportional. Diese heist denn überhaupt das Gesetz des Widerstandes, und man hat alsdenn überhaupt $R = E.c^{2m}$; oder $R = E.v^m$, wenn $v = cc$. Ist nun $v = K$ für $R = M$: so wird $M = E.K^m$, und $\frac{R}{M} = \frac{v^m}{K^m}$; also $dc = -\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{M}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{v^m}{K^m}dt$, oder $2cdc = dv =$

$-\frac{v^m}{K^m}dx$; oder auch $dv = -\frac{V}{Q}dx$, wenn $V = v^m$, und $Q = K^m$ ist. Diese Betrachtungen werden dazu dienen, Hrn. Eulers und Hrn. Kästners Rechnungen in den angeführten Schriften desto besser zu verstehen, dafern man anders in der Integralrechnung geübt ist.

313 §.

Es hat aber seine Unbequemlichkeiten, wenn man die Geschwindigkeit aus der Rechnung wegläßt, und sie durch die Quadratwurzel der ihr zugehörigen Höhe ausdrückt (117 §). Deswegen soll hier der Exponent des Widerstandes diejenige Geschwindigkeit selbst bedeuten, für welche $R = M$ wird. Diese Geschwindigkeit sey $= k$: so hat man $dc = -\frac{2g.cc}{kk}dt$; oder auch $\frac{dc}{c} = -\frac{2g.dx}{kk}$, weil $cdt = dx$.

Die Anwendung dieser allgemeinen Theorie auf besondre Fälle, hat nun weiter keine andre Schwürigkeit, als diejenige, welche die Integrationen verursachen, die sich hier nach der Regel des 110 § allein nicht bewerkstelligen lassen. Es wird indessen denjenigen, welche auf die Integralrechnung so viele Zeit nicht verwenden können, als zur vollständigen Erlernung derselben erfordert wird, nicht unangenehm seyn, noch folgende Sätze als eine Probe dieser Anwendung zu lernen.

314 §.

Wenn $y = Ax^k + B$ ist: so hat man allesmahl, wie im 104 §, $dy = k.Ax^{k-1}dx$, wenn gleich

gleich k eine gebrochene, oder negative Zahl ist.

Beweis. Man setze zuerst $x^k = z$; also $y = Az + B$: so erhellet, daß $dy = A dz$ sey. Nun sey zuerst $k = \frac{m}{n}$, wo m und n ganze Zahlen sind: so wird $x^{\frac{m}{n}} = z$, und $x^m = z^n$; also $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$ (104 §). Dies giebt $dz = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{z^{n-1}} dx$.

Weil nun $\frac{x^{m-1}}{z^{n-1}} = \frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}} = x^{\frac{m}{n}-1}$ (68 §. A. R.); so erhält man $dz = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$, und $dy = k.Ax^{k-1}dx$, wenn man wieder k statt $\frac{m}{n}$ schreibt.

Nun sey k eine negative Zahl, und $x^{-k} = z$; oder (66 § A. R.) $\frac{1}{x^k} = z$: so hat man $x^k z = 1$; folglich $x^k dz + z d.x^k = 0$ (104 §). Weil nun $dx^k = kx^{k-1}dx$: so wird $x^k dz + kzx^{k-1}dx = 0$; und dies giebt $dz = -k.z.x^{-1}dx$. Weil aber $z = x^{-k}$: so erhält man $dz = -k.x^{-k-1}dx$, und $dy = -k.Ax^{-k-1}dx$.

Es folgt hieraus, daß allemahl nach der Regel des 110ten § das Integral von $dy = Ax^n dx$ gefunden werde, wenn gleich n eine gebro-

gebrochene oder negative Zahl wäre. Man hat allemahl $y = \int Ax^n dx = \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + B$. Also

$$\int Ax^{\frac{m}{n}} dx = \frac{Ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + B = \frac{n}{m+n} . Ax^{\frac{m+n}{n}} + B;$$

und $\int Ax^{1-k} dx = \frac{Ax^{1-k}}{1-k} + B.$

Wenn $n = -1$, und $dy = x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$ ist:

so giebt die Regel $\frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$.

Also scheint das Integral unendlich zu seyn. Woher dies komme, läst sich hier ohne grosse Weitläuftigkeit noch nicht zeigen. Die ganze Sache wird bey der vollständigen Ausführung der Integralrechnung erörtert werden. Folgende Betrachtungen werden kürzer zeigen, wie in diesem Fall das Integral zu finden sey.

315 §.

200 Das Integral von $dy = \frac{dx}{x} = x^{-1} dx$, zu finden.

Fig.

Aufl. Man setze, AP $= x$ sey eine grade Linie von unbestimmter Länge. Ist nun AB $= 1$, und das Verhältniß AC : AB sehr klein, so daß $\frac{AC}{AB}$ fast $= 1$ ist: so ist BC der natürliche Logarithme des Ver-

Verhältnisses $\frac{AC}{AB}$ (147 §. A. R.) Nun sey $bc = BC = l\frac{AC}{AB}$, und es bedeute l den natürlichen Logarithmen; ferner sey $\frac{AP}{AB} = \frac{AC^n}{AB^n}$: so ist $l\frac{AP}{AB} = nl\frac{AC}{AB} = n.bc$. Man nehme $bh = n.bc$, so ist $bh = l\frac{AP}{AB}$. Ferner sey $AB:AC = AP:Ap$, oder $\frac{Ap}{AP} = \frac{AC}{AB}$; so ist $l\frac{Ap}{AP} = l\frac{AC}{AB} = bc$, und es wird $\frac{Ap}{AB} = \frac{AC^{n+1}}{AB^{n+1}}$; folglich $l\frac{Ap}{AB} = (n+1)\,l\frac{AC}{AB} = (n+1)\,bc$.

Man nehme also $hk = bc$, so ist $bk = l\frac{Ap}{AB}$. Weil nun $AB = 1$, so kann man auch setzen $lAp = bk$, $lAP = bh$, und daraus erhellet, wenn AP um das Stück Pp wächst, daß lAP um das Stück $hk = BC$ anwachse. Setzt man also $AP = x$, und $Pp = \Delta x$; so wird $bh = lx$, und $hk = BC = \Delta.lx$; und die Gleichung $\frac{Ap}{AP} = \frac{AC}{AB}$ giebt $\frac{x+\Delta x}{x} = 1+\Delta lx$, oder $1+\frac{\Delta x}{x} = 1+\Delta.lx$, also $\frac{\Delta x}{x} = \Delta.lx$, oder $\frac{1}{x} = \frac{\Delta.lx}{\Delta x}$. Die Voraussetzungen,

kungen, worauf sich diese Schlüsse gründen, kommen den eigentlichen Begriffen von den natürlichen Logarithmen desto näher, je kleiner Δx, also auch $\Delta . lx$ werden; und der eigentliche Begrif der natürlichen Logarithmen erfordert, daß $l\frac{AB+BC}{AC}$, oder $l\frac{1+\Delta x}{1}$, alsdenn allererst $= \Delta x$ werde, wenn Δx verschwindet; oder daß die Grenze des Verhältnisses $\frac{l(1+\Delta x)}{\Delta x}$, d. i. $\frac{l(1+dx)}{dx} = 1$ werde.

Wenn man also die zuletzt gefundene Gleichung so ausdrückt: $\frac{d.lx}{dx} = \frac{1}{x}$; so wird sie diesem Begriffe völlig gemäß: folglich wird $d.lx = \frac{dx}{x} = x^{-1}\,dx$, und $lx = \int\frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx$. Ist also $dy = \frac{dx}{x}$; so wird $y = lx$, wo aber allemahl das l den natürlichen Logarithmen bedeutet.

Hätte man also $dy = \frac{dz}{1+z}$; so wird $y = l(1+z)$. Wenn man nemlich $1+z = x$ setzt; so wird $dz = dx$, und $\frac{dz}{1+z} = \frac{dx}{x}$, also $\int\frac{dz}{1+z} = lx = l(1+z)$.

Wäre aber $dy = \frac{dz}{1-z}$: so würde $y = -l(1-z)$.

$l(1-z)$. Wenn nemlich $1-z=x$ gesetzt wird; so ist $-dz=dx$, oder $dz=-dx$; also $\frac{dz}{1-z}=-\frac{dx}{x}$, und $\int\frac{dz}{1-z}=-lx=-l(1-z)$. Bey der Anwendung auf besondere Untersuchungen muß man, wie schon bekannt ist, zum Integral noch eine beständige Grösse addiren, die sich denn aus den Umständen der jedesmahligen Aufgabe bestimmen läst.

Wenn überhaupt $dy=\frac{Adz}{B+Cz}$ ist, und man setzt $B+Cz=x$, so hat man $dz=\frac{1}{C}dx$, und $dy=\frac{A}{C}\cdot\frac{dx}{x}$, folglich $y=\frac{A}{C}lx=\frac{A}{C}l(B+Cz)+E$. Wenn also $y=0$ seyn muß, wenn $z=0$ ist, so wird $E=-\frac{A}{C}lB$, und $y=\frac{A}{C}l\frac{B+Cz}{B}$. Wäre aber $dy=\frac{Adz}{B-Cz}$, so ist C negativ, also $y=-\frac{A}{C}l\frac{B-Cz}{B}=\frac{A}{C}l\left(\frac{B-Cz}{B}\right)^{-1}=\frac{A}{C}l\frac{B}{B-Cz}$.

316 §.

Eine Potenz, die einen veränderlichen Exponenten hat, wie a^x heist eine Exponentialgrösse. Es kann die Wurzel einer solchen Potenz selbst veränder-

lich seyn, wie z. E. y^x, hier aber soll nur kurz von denjenigen, die eine beständige Wurzel haben, folgendes bemerkt werden. Sie haben von den Logarithmen ihren Ursprung. Wenn nemlich $ly = xla$ ist, so ist $y = a^x$ (§. A. R.), und hieraus ergiebt sich leicht die Auflösung der folgenden beyden Aufgaben.

Das Differential von $y = a^x$ zu finden.

Aufl. Man setze $ly = xla$, so ist $\frac{dy}{y} = dxla$, also $dy = ydxla$, oder $dy = a^x dxla$.

Weil $dxla$ das Differential des Logarithmen von a^x ist; so läst sich die Regel so ausdrücken: Man multiplicire die Exponentialgrösse a^x in das Differential ihres Logarithmen, so ist das Product das Differential der Exponentialgrösse. Demnach ist $d.e^x = e^x dx$, wenn e die basis der natürlichen Logarithmen ist.

In der That gilt die angeführte Regel für jede Function. Es ist nemlich $dy = y \times \frac{dy}{y} = yxd.ly$.

Das Integral von $dy = a^x dxla$ zu finden.

Aufl. Die Vergleichung mit der vorigen Aufgabe ergiebt, daß $y = a^x + C$ sey. Wenn man aber in ähnlichen Fällen, wo das Differential eine Exponentialgrösse enthält, nicht sogleich übersiehet, wie das Integral zu nehmen sey; so setze man die Exponentialgrösse a^x einer andern veränderlichen Grösse z gleich, und nehme die Logarithmen, so hat man $xla = lz$, und $dxla = \frac{dz}{z}$. Dies in die Differentialgleichung gesetzt, giebt $dy = dz$, also $y = z + C$, oder $y = a^x + C$.

317 §.

Ein fester Körper, dessen Gestalt Grösse und Dichtigkeit gegeben ist, geht in einer flüssigen Masse, deren Dichtigkeit gleichfalls gegeben ist, mit paralleler Bewegung fort. Ausser dem ersten Stoß, der ihm die Geschwindigkeit h mitgetheilet hat, ist keine Kraft da, die ihn treibt: man sucht seine Geschwindigkeit c nach verflossener Zeit t, und den nach dieser Zeit t zurückgelegten Weg x.

Aufl. Man muß zuförderst die Grösse des Widerstandes aus den Gründen des 300 und 304 §. herleiten. Wenn die Vorderfläche des Körpers, die dem Widerstande eigentlich ausgesetzt ist, eine krumme Fläche ist: so muß man ein Verfahren anbringen, das demjenigen ähnlich ist, so bey der Kugel im 390 §. gebraucht worden. Es wird aber, wenn die mittlere Richtung des Widerstandes durch den Schwerpunct gehet, der Ausdruck für den Widerstand unter dieser Formul begriffen seyn: $R = Ecc$, so daß E eine beständige Grösse ist. Aus der Grösse und Dichtigkeit eines festen Körpers, suche man sein Gewicht $= M$, setze hierauf diejenige Geschwindigkeit $= k$, für welche $R = M$ wird: so giebt die Gleichung $M = Ekk$, den Exponenten des Widerstandes $k = \sqrt{\frac{E}{M}}$, und man hat nun $dc = -\frac{2g.cc}{kk}dt$, oder $\frac{dc}{cc} = c^{-2}dv = -\frac{2g}{kk}dt$.

Die Integration giebt $\frac{c^{-2+1}}{-2+1}$ (315 §.) $= C$

$-\frac{2gt}{kk}$, oder $-\frac{1}{c} = C - \frac{2gt}{kk}$. Im Anfange der Zeit t war $c = h$, also muß $t = 0$ seyn, wenn $c = h$ ist, und dies giebt $C = -\frac{1}{h}$; folglich wird $\frac{1}{c} = \frac{1}{h} + \frac{2gt}{kk} = \frac{kk + 2ght}{hkk}$; also $c = \frac{hkk}{kk + 2ght}$. Diese Gleichung ergiebt, daß c nie $= 0$ werde, weil der gefundene Ausdruck nicht verschwindet, dafern nicht $t = \infty$ gesetzt wird. Also geht die Bewegung ohne Aufhören fort, obgleich die Geschwindigkeit beständig abnimmt.

Man hat ferner $dv = -\frac{2g.c.dx}{kk}$ oder $\frac{dc}{c} = -\frac{2gdx}{kk}$ (112 §) und dies integrirt, giebt lc (316 §) $= C - \frac{2gx}{kk}$. Wenn nun $c = h$ ist, so muß $x = 0$ seyn. Dies giebt $lh = C$, und daher wird $lc = lh - \frac{2gx}{kk}$, oder $lh - lc = \frac{2gx}{kk}$ d. i. $l\frac{h}{c} = \frac{2gx}{kk}$. Daraus folgt $\frac{h}{c} = e^{\frac{2gx}{kk}}$, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen ist (147 §. A. R.) und $c = \frac{h}{e^{\frac{2gx}{kk}}}$.

Beyde Werthe von c gleich gesetzt, geben $\frac{hkk}{kk+2ght} = \frac{h}{e^{\frac{2gx}{kk}}}$, und daraus folgt

$kke^{\frac{2gx}{kk}} = kk+2ght$; folglich $t = \frac{kk(e^{\frac{2gx}{kk}}-1)}{2gh}$.

Umgekehrt $e^{\frac{2gx}{kk}} = 1+\frac{2gh}{kk}t$; also $\frac{2gx}{kk} = l\left(1+\frac{2gh}{kk}t\right)$, und $x = \frac{kk}{2g}l\left(1+\frac{2gh}{kk}t\right)$.

Wenn man $g = \frac{1}{4}$ setzt, und v, k, h statt c^2, k^2, h^2 schreibt (117 §); so muß man $\sqrt{v}$ und $\sqrt{h}$ statt c und h setzen. Dann wird $\sqrt{v} = \frac{k\sqrt{h}}{k+\frac{1}{2}t\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h}}{e^{\frac{x}{2k}}}$; oder $v = \frac{h}{e^{\frac{x}{k}}}$, und $t = \frac{2k(e^{\frac{x}{2k}}-1)}{\sqrt{h}}$, welches die Eulerischen Gleichungen sind. Mech. T. I. Cap. IV. §. 387. 397.

318 §.

Wenn die Dichtigkeit der flüßigen Massen $= n$, und der feste Körper eine Kugel ist, ihr Halbmesser $= r$, ihre Dichtigkeit $= n$; so wird $R = \frac{1}{8g}ncc\pi r^2$ (309 §), und $M = \frac{4}{3}m\pi r^3$. Man

setze $c = k$, und $\frac{1}{8g} nkk\pi r^2 = \frac{4}{3} m\pi r^3$; so wird $\frac{1}{8g} nkk = \frac{4}{3} mr$, und $kk = \frac{3^2 \cdot mr \cdot g}{3^n}$. Setzt man diesen Werth statt kk in die gefundenen Gleichungen; so erhält man

$$c = \frac{3^{2mrhg}}{3^n} : \left(\frac{3^{2mrg}}{3^n} + 2ght\right) = \frac{16mrh}{16mr + 3nht};$$

oder $c = \frac{h}{1 + \frac{3}{16} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{h}{r} t}$. So wird auch $c = \frac{h}{\frac{2gx}{kk}} = \frac{h}{\frac{3nx}{16mr}}$. Ueberdem hat man $\frac{2g}{kk} = \frac{3^n}{16mr}$, und $\frac{kk}{2gh} = \frac{16mr}{3nh}$; also $t = \frac{16mr}{3nh}\left(e^{\frac{3nx}{16mr}} - 1\right)$, und $x = \frac{16mr}{3^n} l\left(1 + \frac{3nh}{16mr} t\right)$.

Man wird auf eben die Art die allgemeine Auflösung des 317 § leicht auf andre besondre Fälle anwenden, in welchen sich der Widerstand R aus der Gestalt und Grösse des festen und der Dichtigkeit des flüßigen Körpers berechnen läst. Man kann zur Uebung die Anwendung auf die Fälle machen, welche im 300. 304. 307. 308 § betrachtet worden.

Der XX. Abschnitt.

Vom Steigen und Fall der schweren Körper in der Luft.

319 §.

Es ist das Differential $dy = \frac{dz}{1-zz}$ gegeben: man soll das Integral $y = \int \frac{dz}{1-zz}$ finden.

Aufl. Es ist $\frac{1}{1-zz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z}$, also $\frac{dz}{1-zz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{1+z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{1-z}$.

Folglich nach dem 316 §, $\int \frac{dz}{1-zz} = \frac{1}{2} l(1+z) - \frac{1}{2} l(1-z)$, oder $\int \frac{dz}{1-zz} = \frac{1}{2} l \frac{1+z}{1-z} = l \frac{\sqrt{(1+z)}}{\sqrt{(1-z)}}$.

320 §.

Eine unveränderliche Kraft P treibe einen festen Körper, dessen Masse $= M$ ist, und welcher in einer flüßigen Masse mit paralleler Bewegung fortgehet, nach der Richtung der Be-

wegung. Die Richtung dieser Kraft sowohl, als die mittlere Richtung des Widerstandes, gehe durch den Schwerpunct der Masse *M*. Man sucht die am Ende der Zeit *t* erlangte Geschwindigkeit *c*, vorausgesetzt, daß der Exponent des Widerstandes *k* bekannt, und im Anfange der Zeit *t* die Geschwindigkeit $c = k$ sey.

Aufl. Wegen der Kraft P ist die Beschleunigung $= \frac{P}{M}$; und wegen des Widerstandes ist die Verzögerung $= -\frac{cc}{kk}$. Es sey $\frac{P}{M} = p$: so ist *p* unveränderlich, weil es P ist, und man erhält $dc = 2g\left(p - \frac{cc}{kk}\right)dt$; oder $\frac{dc}{p - \frac{cc}{kk}} = 2g\,dt$, welches man auch so ausdrücken kann $\frac{dc : p}{1 - \frac{cc}{pkk}} = 2g\,dt$.

Man setze $\frac{c}{k\sqrt{p}} = z$: so wird $c = kz\sqrt{p}$, und $dc = kdz\sqrt{p}$; also $\frac{dc}{p} = \frac{kdz}{\sqrt{p}}$, und $\frac{k}{\sqrt{p}}$.

$\frac{dz}{1 - zz} = 2g\,dt$. Dies nach dem vor. § integrirt, giebt $\frac{k}{2\sqrt{p}}\, l\frac{1+z}{1-z} = 2gt + C$. Wird also der Werth $z = \frac{c}{k\sqrt{p}}$ wiederhergestellt: so wird

$\frac{1+z}{1-z} = \frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}-c}$, und $\frac{k}{2\sqrt{p}} l \frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}-c}$ $= 2gt + C$. Für $t = 0$ muß $c = h$ seyn. Also wird $\frac{k}{2\sqrt{p}} l \frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h} = C$ und man erhält $\frac{k}{2\sqrt{p}} \left(l \frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}-c} - l \frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h} \right) = 2gt$. Der Kürze wegen setze man $\frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h} = A$; so wird $l \frac{k\sqrt{p}+c}{A(k\sqrt{p}-c)} = \frac{4gt\sqrt{p}}{k}$: und wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen ist; so wird $\frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}-c}$ $= Ae^{\frac{4gt\sqrt{p}}{k}}$. Man setze ferner $Ae^{\frac{4gt\sqrt{p}}{k}} = T$, so erhält man $\frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}-c} = T$, und daraus folgt $c = \frac{kT\sqrt{p}-k\sqrt{p}}{1+T}$, oder $c = \frac{(T-1)k\sqrt{p}}{1+T}$.

321 §.

Bey eben den Voraussetzungen des vor. § eine Gleichung zu finden, welche die Geschwindigkeit durch den in der Zeit t zurückgelegten Weg x ausdrückt.

Aufl. Die Gleichung $\frac{dc}{p - \frac{cc}{kk}} = 2g\,dt$ mit

$2c$ multiplicirt, giebt $\frac{2cdc}{p-\frac{cc}{kk}} = 4gdx$, weil $\frac{v}{k}$

$cdt = dx$ ist. Man setze $p - \frac{cc}{kk} = u$: so wird

$2cdc = -kkdu$, und $-\frac{kkdu}{u} = 4gdx$. Dies nach dem 316 § integrirt, giebt $C - kk\,l\,u = 4gx$, d. i.

$C - kk\,l\left(p - \frac{cc}{kk}\right) = 4gx$. Wenn $x = 0$ ist, wird $c = h$; also erhält man $C = kk\,l\left(p - \frac{hh}{kk}\right)$

und $kk\,l\left(p - \frac{hh}{kk}\right) - l\left(p - \frac{cc}{kk}\right) = 4gx$; oder

$l\frac{kkp - hh}{kkp - cc} = \frac{4gx}{kk}$. Hieraus folgt $\frac{kkp - hh}{kkp - cc} = e^{\frac{4gx}{kk}}$; ferner $kkp - hh = kkpe^{\frac{4gx}{kk}} - cc.e^{\frac{4gx}{kk}}$, und

$cc.e^{\frac{4gx}{kk}} = kkpe^{\frac{4gx}{kk}} + hh - kkp$; folglich $cc = kkp - \frac{4gx}{kk} + (hh - kkp)e^{\frac{4gx}{kk}}$.

Dafern v die Höhe ist, welche der Geschwindigkeit c zugehört; die der ersten Geschwindigkeit zugehörige Höhe aber $= h$ ist, und $g = \frac{1}{4}$ gesetzt wird: so muß man $\sqrt{h}$ statt h, und $\sqrt{k}$ statt k schreiben

(117 §). Dies giebt $v = kp + (h - kp)e^{\frac{x}{k}}$. *Euleri* Mech. T. I. §. 419.

322 §.

322 §.

Bey denselben Voraussetzungen den in der Zeit t zurückgelegten Weg x zu finden.

Aufl. Man setze beyde Werthe von cc aus dem 320 und 321 § einander gleich: so erhält man

$$kkp + (hh - kkp)e^{-\frac{4gx}{kk}} = \frac{(T=1)^2 k^2 p}{(1+T)^2}.$$

Daraus folgt $(hh - kkp)e^{-\frac{4gx}{kk}} = -\frac{4kkpT}{(1+T)^2}$,

und $e^{-\frac{4gx}{kk}} = \frac{4kkp}{kkp-hh} \cdot \frac{T}{(1+T)^2}$, oder

$$e^{\frac{4gx}{kk}} = \frac{kkp-hh}{4kkp} \cdot \frac{(1+T)^2}{T}.$$ Nun war im

320§. $\frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h} = A$; daraus folgt $\frac{2k\sqrt{p}}{k\sqrt{p}-h}$

$= 1 + A$, und $\frac{4kkp}{(k\sqrt{p}-h)^2} = (1+A)^2$, und es

wird $\frac{A}{(1+A)^2} = \frac{(k\sqrt{p}+h)(k\sqrt{p}-h}{4kkp} =$

$\frac{kkp-hh}{4kkp}$; folglich $e^{\frac{4gx}{kk}} = \frac{A(1+T)^2}{(1+A)^2 T}$.

Dies giebt $\frac{4gx}{kk} = l\frac{A(1+T)^2}{(1+A)^2 T}$, und $x =$

$\frac{kk}{4g} l\frac{A(1+T)^2}{(1+A)^2 T}$. Es ist aber $T = Ae^{\frac{4gt\sqrt{p}}{k}}$,

also

also wird $x = \frac{kk}{4g} l \frac{\left(1 + Ae^{\frac{4gt\sqrt{p}}{k}}\right)}{(1+A)^2 e^{\frac{4gt\sqrt{p}}{k}}}$.

323 §.

Bey denselben Voraussetzungen aus dem zurückgelegten Wege x die Zeit t zu finden.

Aufl. Aus der Gleichung $e^{\frac{4gx}{kk}} = \frac{A(1+T)^2}{(1+A)^2 T}$

$e^{\frac{4gx}{k^2}} = \frac{A(1+T)^2}{(1+A)^2 T^2}$ (322 §) folgt $\frac{}{T} =$. In der ersten Hälfte dieser Gleichung setze man $T = Ae^{\frac{4gt\sqrt{p}}{k}}$; so wird $e^{\frac{4gx}{k^2} - \frac{4gt\sqrt{p}}{k}} = \frac{A^2}{(1+A)^2}$. $\frac{(1+T)^2}{T^2}$. Hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt $e^{\frac{2gx}{k^2} - \frac{2gt\sqrt{p}}{k}} = \frac{A}{1+A} \cdot \frac{1+T}{T}$;

oder auch $e^{\frac{2gt\sqrt{p}}{k} - \frac{2gx}{k^2}} = \frac{1+A}{A} \cdot \frac{T}{1+T}$.

Nun ist $\frac{1+A}{A} = \frac{2k\sqrt{p}}{k\sqrt{p}+h}$, und $\frac{T}{1+T} = \frac{k\sqrt{p}+c}{2k\sqrt{p}}$, $\left(\text{weil } T = \frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}-c} \text{ (320 §.)}\right)$

folglich wird $e^{\frac{2gt\sqrt{p}}{k} - \frac{2gx}{kk}} = \frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}+h}$.

Nimmt man auf beyden Seiten die Logarithmen, so wird $\frac{2gt\sqrt{p}}{k} - \frac{2gx}{kk} = l\frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}+h}$; und

dies giebt $t = \frac{x}{k\sqrt{p}} + \frac{k}{2g\sqrt{p}} \cdot l\frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}+h}$.

Nun kann man den Werth von c aus dem 321 §. in diese Gleichung setzen: so erhält man

$$t = \frac{x}{k\sqrt{p}} + \frac{k}{2g\sqrt{p}} \cdot l\frac{k\sqrt{p}+\sqrt{\left(k^2p+(hh^2-k^2p)e^{-\frac{4gx}{kk}}\right)}}{k\sqrt{p}+h}.$$

Setzt man allenthalben $\sqrt{k}$ statt k, $\sqrt{h}$, statt h, und $g = \frac{1}{4}$; so erhält man

$$t = \frac{x}{\sqrt{pk}} + 2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{p}} \cdot l\frac{\sqrt{pk}+\sqrt{\left(pk+(h-pk)e^{-\frac{x}{k}}\right)}}{\sqrt{pk}+\sqrt{h}}$$

(*Euleri* Mech. T. I. §. 426.)

Wäre im Anfange der Zeit t die Geschwindigkeit $= 0$, so müste man in diesem Ausdruck $h = 0$ setzen, und dies giebt

$$t = \frac{x}{k\sqrt{p}} + \frac{k}{2g\sqrt{p}} l\left(\frac{k\sqrt{p}+\sqrt{\left(k^2p\left(1-e^{-\frac{4gx}{kk}}\right)\right)}}{k\sqrt{p}}\right)$$

$$= \frac{x}{k\sqrt{p}} + \frac{k}{2g\sqrt{p}} l\left(1+\sqrt{\left(1-e^{-\frac{4gx}{kk}}\right)}\right).$$

Es ist

ist aber $\sqrt{\left(1-e^{\frac{4gx}{kk}}\right)} = \sqrt{\frac{e^{\frac{4gx}{kk}}-1}{e^{\frac{4gx}{kk}}}} =$

$\frac{\sqrt{(e^{\frac{4gx}{kk}}-1)}}{e^{\frac{2gx}{kk}}}$, und hiezu 1 addirt, giebt

$\frac{\sqrt{(e^{\frac{4gx}{kk}}-1)}+e^{\frac{2gx}{kk}}}{e^{\frac{2gx}{kk}}}$.

Dies in den Ausdruck für t gesetzt, giebt

$$t = \frac{x}{kr\,p} + \frac{k}{2gr\,p}\,l\left(r\left(e^{\frac{4gx}{kk}}-1\right)+e^{\frac{2gx}{kk}}\right) - \frac{k}{2gr\,p}\cdot\frac{2gx}{kk}$$

, wo das erste und letzte Glied sich aufheben, so daß $t = \frac{k}{2gr\,p}\,l\left(r\left(e^{\frac{4gx}{kk}}-1\right)+e^{\frac{2gx}{kk}}\right)$ gefunden wird.

324 §.

Eine Kugel von 5 Englischen Zollen im Durchmesser, und in der Luft 483 Gran schwer, ist in freyer Luft durch eine Höhe von 220 Englischen Schuhen frey herabgefallen, ohne den geringsten Stoß im Anfange der Bewegung

wegung zu bekommen: man frägt, wie viel Zeit während des Falles verflossen sey.

Aufl. Es sey das Gewicht der Kugel im leeren Raum = M, und das Gewicht einer gleich grossen Masse Luft = Π: so ist nach den Gesetzen der Hydrostatik das Gewicht der in der Luft schwebenden Kugel = M − Π (88 §. Aerost.) Dies durch das Gewicht der Kugel M dividirt, giebt die Beschleunigung $\frac{M-\Pi}{M} = 1 - \frac{\Pi}{M}$, welche in den allgemeinen Formuln = p gesetzt ist. Der Bruch $\frac{\Pi}{M}$ ist also bekannt, wenn man weiß, wie groß das Gewicht einer Luftkugel sey, die 5 Engl. Zolle im Durchmesser hat. Wenn nun nach Newtons Bestimmung (50 §. Hydrost.) ein Cubiczoll Wasser in der Luft $253\frac{1}{3}$ Gr. wiegt, so ist das Gewicht einer Kugel von 1 Zoll im Durchmesser = $\frac{3}{6}\frac{5}{7}\frac{5}{8} \cdot 253\frac{1}{3}$ Gr = 132,645 Gr. Ist nun die Luft 850 mahl leichter, als Wasser, so wird eine Luftkugel von 1 Zoll im Durchmesser 0,156 Gr. wägen, und dies zum vorigen Gewicht der eben so grossen Wasserkugel addirt, giebt 132,8 Gr. für ihr Gewicht im leeren Raum (88 §. Aerost.) Daher wiegt eine Wasserkugel von 5 Zollen im Durchmesser, 132,8 × 125 Gran = 16600 Gr. und das Gewicht einer gleichen Menge Luft ist $\frac{16600}{850}$ = 19,53 Gr. Diese 19,53 zu 483 addirt geben das Gewicht der Kugel im leeren Raum = 502,53 Gr. und $p = 1 - \frac{19{,}53}{502{,}53}$

$= \frac{483}{502{,}53}$. Weil nun 1000 Engl. Schuhe nur

970 Rheinl. Schuhe ausmachen; so betragen 5 Engl Zoll soviel, als 0,404166 Rheinl. Schuhe; und 220 Engl. Schuhe soviel, als 213,4 Rheinl. Diese Reduction des Maasses ist nöthig, weil man entweder der g in Engl. Schuhen ausdrücken, oder alles auf Rheinl. Maaß bringen muß, wenn $g = 15{,}625$ Rh. Fuß genommen werden soll. Wenn nun der Kugel Halbmesser $= r$, ihre Dichtigkeit $= m$; die Dichtigkeit der Luft $= n$ ist: so ist der Exponent des Widerstandes $k = \sqrt{\frac{3^2 mrg}{3^n}}$ (318 §) $= \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{m}{n}} \times 2r \times 4g$; und man erhält $\frac{m}{n} = \frac{502{,}53}{19{,}53} = 25{,}73$, $\frac{4m}{3^n} = 34{,}3$; $2r = 5$ Engl. Zoll $=$ 0,404166 Rh. Fuß. Nun war $t = \frac{k}{2g\sqrt{p}} l\left(e^{\frac{2gx}{kk}} + \sqrt{\left(e^{\frac{4gx}{kk}} - 1\right)}\right)$ (323 §), und dieser Ausdruck läst sich auch so verändern. Man setze der Kürze wegen $\frac{4gx}{kk} = z$: so ist $\frac{2gx}{kk} = \frac{1}{2}z$ und

$$e^{\frac{1}{2}z} + \sqrt{(e^z - 1)} = e^{\frac{1}{2}z}\left(1 + r(1 - e^{-z})\right) = \frac{1 + r(1 - e^{-z})}{e^{-\frac{1}{2}z}}.$$

Dies giebt $t = \frac{k}{2gr\sqrt{p}} l \frac{1 + r(1 - e^{-z})}{e^{-\frac{1}{2}z}}$, oder $t = \frac{k}{2gr\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{2} l \left(\frac{(1 + r(1 - e^{-z})}{e^{-z}}\right)^2$. Endlich ist $e^{-z} =$

$\left(1+r(1-e^{-z})\right)\left(1-r(1-e^{-z})\right)$ und dies giebt $t=\frac{k}{4gr\sqrt{p}}\,l\,\frac{1+r(1-e^{-z})}{1-r(1-e^{-z})}$. Nun kann man aus dieser Formul mit Vortheil rechnen, wenn man mit Hr. Euler $g=\frac{1}{4}$ setzt, und die Linien in Scrupeln leines Rheinländischen Fusses ausdrückt, so erhält man t in $\frac{1}{250}$ Secunden ausgedrückt (11 §). Diese Voraussetzung giebt $kk=\frac{4m.2r}{3^n}$: folglich $z=\frac{3^{nx}}{4m.2r}$, und $t=\frac{r\,4m.2r}{r\,3^{np}}\,l\,\frac{1+r\left(1-e^{-\frac{3}{4}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{x}{2r}}\right)}{1-r\left(1-e^{-\frac{3}{4}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{x}{2r}}\right)}$. Um den Bruch $\frac{x}{2r}$ zu berechnen, ist die Reduction des Englischen Maasses auf das Rheinländische nicht nöthig. Man kann $x=220$ Fuß $=2640$ Zoll, und $2r=5$ Zoll behalten. Es war aber $\frac{4m}{3^n}=34{,}3$; also ist $\frac{4m}{3^n}\times 2r=171{,}5$. Dies giebt $\frac{3^{nx}}{4m.2r}=x:\frac{4m.2r}{3^n}=\frac{2640}{171{,}5}=15{,}3935$. Man setze diese Zahl $=z$, wie vorhin, und $e^{-z}=Z$: so wird $-zle=lZ$, wenn hier die Logarithmen der Tafeln genommen werden. Weil nun $e=$

2,718281828 (A. R. 163 §); so wird $le = 0{,}43429448$, und die Multiplication giebt $-zle = lZ = -6{,}6853120$; also ist $Z = \frac{1}{4845200}$. Nun kommt es nur darauf an, $r(1-Z)$ zu finden, und dies kann man kurz so bewerkstelligen. Es sey $r(1-Z) = 1-u$: so wird u nur eine sehr kleine Zahl seyn, weil Z schon sehr klein ist, und $r(1-Z)$ nicht so sehr von 1 unterschieden seyn kann, als $1-Z$ davon unterschieden ist. Diese Voraussetzung giebt $1-Z = 1-2u+uu$, wo uu eine überaus kleine Zahl ist, die hier ohne merklichen Irrthum aus der Acht gelassen werden kann. Also wird $Z = 2u$, und $u = \frac{1}{2}z$; folglich beynahe $r(1-Z) = 1-\frac{1}{2}Z$, und die fernere Rechnung giebt

$$r(1-Z) = 1-\frac{1}{9690400},$$

$$1+r(1-Z) = 2-\frac{1}{9690400},$$

$$1-r(1-Z) = \frac{1}{9690400},$$

folglich $\frac{1+r(1-Z)}{1-r(1-Z)} = 19380800$

und wenn man den Logarithmen der Tafeln nimmt: so ist

$$l\frac{1+r(1-Z)}{1-r(1-Z)} = 7{,}2873717.$$

Dies mit dem Modul der Briggischen Logarithmen 0,3442944 dividirt, oder welches einerley ist, mit $\frac{1}{0{,}4342944} = 2{,}302585$ (A. R. 163 §.) multiplicirt, giebt

log

$$\log \text{nat} \frac{1+r(1-Z)}{1-r(1-Z)} = 16{,}7797934.$$

Nun ist noch übrig, den Bruch $r\frac{4^m \cdot 2r}{3^n \cdot rp}$, oder $\frac{k}{rp}$, zu suchen. Es war aber $2r = 404{,}166$ Scrupel eines Rheinl. Fusses, welches Maaß hier nun gebraucht werden muß, und überdem $\frac{4^m}{3^n} = 34{,}308$. Also giebt die Rechnung

$$l\frac{4^m}{3^n} = 1{,}5353954$$
$$l2r = 2{,}6065598$$

$$l\frac{4^m \cdot 2r}{3^n} = lk^2 = 4{,}1419552$$
$$lk = 2{,}0709776$$

Ferner war $p = \frac{483}{402{,}35}$, also

$$l\ 483 = 4{,}6839471 - 2$$
$$l\ 502{,}35 = 2{,}7011620$$
$$lp = 1{,}9827851 - 2$$
$$lrp = 0{,}9913925 - 1$$

Dies giebt $l\frac{k}{rp} = 3{,}0795851 - 1$

Wenn man die zugehörige Zahl statt $\frac{k}{rp}$ setzt:

so findet man die Zeit in $\frac{1}{250}$ Secunden. Um sie also in Secunden zu erhalten, kann man gleich mit 250 dividiren, und in solcher Absicht subtrahire man noch

$l250$

$$l\,250 = 2{,}3979400$$

$$\text{so wird } l\frac{k}{250rp} = 0{,}6816451 - 1$$

$$\text{und } \frac{k}{250rp} = 0{,}4804464$$

Dies multiplicirt, mit 16,7797934, giebt

$t = 8{,}061746$ Secunden.

325 §.

Newton ließ im Junius des 1710 Jahrs durch Hawksben in der St. Paulus-Kirche zu London verschiedene hohle gläserne Kugeln aus einer Höhe von 220 Engl. Fussen herabfallen, und man beobachtete zugleich die Zeit ihres Falles. Eine davon hatte die Grösse und Schwere, wie im vor. § angenommen worden, und man fand die Zeit ihres Falles von 8,2 Secunden. Die Vergleichung zeigt, daß dies mit dem Resultat, was die Theorie giebt, sehr wohl übereinkomme. Im leeren Raume würde der Fall nicht völlig 4 Secunden gewährt haben, und in der Zeit von 8 Secunden wäre der Körper 1000 Rheinl. Fuß gefallen. Bey den übrigen Kugeln traf der Erfolg eben so gut mit der Theorie überein. Die Resultate der Versuche waren folgende:

Gewichte der Kugeln.	Durchmesser der Kugeln.	Zeiten des Falles.	Berechnete Höhen.
510 Gran	5,1 Zoll	8 Sec. 12 Tert.	226 F. 11 Zoll
642 -	5,2 -	7 - 42 -	230 - 9 -
599 -	5,1 -	7 - 42 -	227 - 10 -
515 -	5,0 -	7 - 57 -	224 - 5 -
483 -	5,0 -	8 - 12 -	225 - 5 -
641 -	5,2 -	7 - 42 -	230 - 7 -

Diese

Diese Versuche verglich Newton auf folgende Art mit seiner Theorie, die mit der vorhin vorgetragenen auf einerley Gründen beruhet. Er berechnete aus den beobachteten Zeiten die zugehörige Höhe des Falles, und fand für diese Höhen die Zahlen, welche in obstehender Tafel, in der vierten Columne zur Seiten stehen. Da der gröste Unterscheid nicht über 11 Fuß beträgt, und der kleinste nur $1\frac{1}{2}$ Fuß ausmacht; so ist die Uebereinstimmung so genau, als man bey Untersuchungen von dieser Art immer erwarten kan. Im Monath Julius des Jahrs 1719 wiederholte Desaguliers ähnliche Versuche mit noch viel leichtern hohlen Kugeln, die aus Schweinsblasen gemacht waren. Man machte sie naß, und bließ hierauf, nachdem sie vorher in die innere Höhlung einer hölzernen Kugelform gebracht waren, Luft hinein. Hiedurch wurden sie gezwungen, die Kugelgestalt anzunehmen, die sie, nachdem sie trocken geworden waren, behielten. Man ließ sie aus einer Höhe von 272 Fuß herabfallen, und die Versuche gaben folgende Resultate:

Gewichte der Kugeln.	Durchmesser der Kugeln.	Zeiten des Falles.	Berechnete Höhen.
128 Gran	5,28 Zoll	19 Sec.	271 F. 11 Zoll
156 -	5,19 -	17 -	272 - $10\frac{1}{2}$ -
$137\frac{1}{2}$ -	5,3 -	$18\frac{1}{2}$ -	272 - 7 -
$97\frac{1}{2}$ -	5,26 -	22 -	277 - 4 -
$99\frac{1}{8}$ -	5,1 ——	$21\frac{1}{8}$ -	282 - 0 -

Die in der vierten Columne befindlichen Höhen sind wiederum diejenigen, welche Newton aus den beobachteten Zeiten des Falles nach der Theorie berechnet hat, und man siehet mit Vergnügen, daß die

drey ersten nicht um einen Fuß von den Beobachtungen abweichen. Newton nimmt bey dieser sowol, als der vorigen Rechnung, die Luft 860 mal schwerer, als Wasser an. Man s. *Newtoni* Principia Phil. Nat. Math. Lib. II. Prop. XL. Schol.

326 §.

Will man mit Newton aus den beobachteten Zeiten des Falles die zugehörigen Höhen berechnen; so kann man sich folgender Näherung bedienen. In der Gleichung $t = \frac{k}{4g\sqrt{p}} l \frac{1+\sqrt{(1-e^{-z})}}{1-r(1-e^{-z})}$ (324 §) setzt man $r(1-e^{-z}) = 1-\frac{1}{2}e^{-z}$, welches vermöge des im 324 § geführten Beweises beynahe richtig ist. Dies giebt $t = \frac{k}{4gr\sqrt{p}} l \frac{2-\frac{1}{2}e^{-z}}{\frac{1}{2}e^{-z}}$, wo wiederum $2-\frac{1}{2}e^{-z}$ beynahe $= 2$ ist. Also kann man $t = \frac{k}{4gr\sqrt{p}} l 4e^{z}$ setzen. Nun war $p = \frac{M-\Pi}{M} = 1-\frac{\Pi}{M} = 1-\frac{n}{m}$. Es sey $\frac{m}{n} = \mu$: so ist $p = 1-\frac{1}{\mu} = \frac{\mu-1}{\mu}$. Ferner war $z = \frac{4gx}{kk}$, und $kk = \frac{4m.2r}{3^n} = \frac{4.2r.\mu}{3}$. Folglich wird $z = \frac{3.g.x}{2r.\mu}$, und weil $k = \frac{2r.2r.\mu}{r3}$; so erhält man $\frac{k}{4gr\sqrt{p}} = \frac{\mu.r2r}{2gr3(\mu-1)}$, und

$$t = \frac{\mu r2.r}{2gr3(\mu-1)}.\left(l4+\frac{3.g.x}{2r.\mu}\right), \text{ weil } le = 1$$

ist; also $t = \frac{\mu r^{2r}}{r(\mu-1)}\left(\frac{l4}{2gr3} + \frac{r3}{2}\cdot\frac{x}{2r.\mu}\right)$.

Wenn man nun $g = \frac{1}{4}$ Scr. eines Rheinl. Fusses setzt; so drückt diese Gleichung die Zeit in $\frac{1}{250}$ Sec. aus, und man muß die herausgebrachte Zahl durch 250 dividiren, um sie in Secunden zu erhalten. Dann aber wird $t = \frac{\mu r^{2r}}{r(\mu-1)}\left(\frac{l4}{125r3} + \frac{r3}{500}\cdot\frac{x}{2r.\mu}\right)$. Hier kann man nun ein für allemahl die Zahlen $\frac{l4}{125r3}$, imgleichen $\frac{r3}{500}$ suchen. Es wird nemlich der natürliche Logarithme $4 = 1{,}38629436$; $r3 = 1{,}7320508$; $125r3 = 216{,}50635$; $\frac{l4}{125r3} = 0{,}0064030$; und $\frac{r3}{500} = 0{,}0034641$. Dies giebt

$$t = \frac{\mu r^{2r}}{r(\mu-1)}\left(0{,}0064030 + 0{,}0034641\frac{x}{2r.\mu}\right);$$

und daraus folgt $\frac{x}{2r.\mu} = 288{,}675\cdot\frac{tr(\mu-1)}{\mu r^{2r}} - 1{,}8484$. Dieselbe Formul hat Herr Euler in Robins Erläut. Artillerie 517 S., so daß man nur c statt $2r$, und n statt μ in die gegenwärtige Formul setzen darf, um die Eulerische zu erhalten. In dem Exempel des 324 § war $\frac{m}{n} = \mu = 25{,}73$, und $2r = 404{,}166$ Rheinl. Scrupel. Aber die von Newton beobachtete Zeit war 8,2 Sec. Nun findet man $l(\mu-1)$

$l(\mu - 1) = 1{,}3932241$
$lr(\mu - 1) = 0{,}6966120{,}5$
$lt = 0{,}9138139$
$l288{,}675 = 2{,}4604091$

$l288{,}675 \times tr(\mu - 1) = 4{,}0708350$
$l2r = 2{,}6065598$
$lr2r = 1{,}3032799$
$l\mu = 1{,}4104398$

subtr. $l\mu r2r = 2{,}7137197$
$1{,}3571153$

die zugehörige Zahl ist 22,7570
subtr. 1,8484

Also wird $\frac{x}{2r\mu} = 20{,}9086$

Weil der Bruch $\frac{x}{2r}$ derselbe bleibt, man mag Zähler und Nenner, in welchem Maaß man will, ausdrücken: so kann man $2r = 5$ Engl. Zoll $= 1\frac{5}{12}$ Engl. Fuß behalten, so findet man auch x in Engl. Fussen. Es wird aber $2r \cdot \mu = 10{,}72$; also

$x = 20{,}9086 \times 10{,}72 = 224{,}14$ Engl. Fuß, welches mit der Newtonischen Berechnung in der im vorigen § mitgetheilten ersten kleinen Tafel übereinkommt.

327 §.

Newton hat ähnliche Versuche über den Widerstand des Wassers angestellt, die er an eben dem angef. Orte Prop. XL. Schol. beschreibt, und sie stimmen mit der bisherigen Theorie eben so gut, als die vorigen, überein, die den Widerstand der Luft betref-

treffen. Daher hielte man seit der Zeit dafür, daß die Theorie vom Widerstande der flüßigen Massen zur überzeugenden Richtigkeit gebracht sey, zumahl, da sich dieselbe noch durch andre Gründe bestätigen läst, die in der Folge in der Mechanik der flüßigen Körper vorkommen werden. Allein Hr. Robin setzte in seiner im Jahr 1742 bekannt gemachten Artillerie dieser Theorie, und zwar vornemlich in Absicht auf den Widerstand der Luft, dem Ansehen nach sehr grosse Schwürigkeiten entgegen. Aus seinen Versuchen, die er mit Geschützkugeln anstellte, schien zu folgen, daß die Newtonische Theorie bey langsamen Bewegungen so ziemlich richtig sey; aber desto mehr von der Erfahrung abweiche, je schneller die Bewegungen werden. Robin schloß aus seinen Versuchen, daß bey so schnellen Bewegungen, als den Geschützkugeln durch die Gewalt des Pulvers mitgetheilt wird, der Widerstand der Luft fast dreymahl grösser sey, als er nach der Newtonischen Theorie seyn müste. Man s. Robins Artillerie II. Cap. 2 Satz 494 S. der Uebers. Herr Euler, der seine Uebersetzung dieses Werks mit vortreflichen Anmerkungen und Erläuterungen bereichert hat, tritt dem Hrn. Robin gleichfalls bey, und glaubt, daß die Newtonische Theorie nur bey langsamen Bewegungen zutreffe, dergleichen alle diejenigen waren, welche Newton als Versuche brauchte, um seine Theorie zu prüfen. Daher sucht nicht allein Herr Robin, sondern auch Herr Euler diese Theorie so zu verbessern, daß sie auch bey sehr schnellen Bewegungen mit dem Erfolg übereinkommen möge. Man findet Robins Regel a. a. O. II Cap. III Satz 523 S., und Herr Eulers Regel in den Anmerkungnn

über

über diesen Satz, besonders auf der 539 u. f. Seiten. Eine hievon noch etwas verschiedene Regel giebt Hr. Euler im IX. Tome der Histoire de l'Academie de Berlin 321 Seite, in der Abhandlung: Recherches sur la veritable courbe, que décrivent les corps jettés dans l'air, ou dans un autre fluide quelconque. Eben diesen Aufsatz hat Herr Henning Friederich, des Heil. R. R. Graf von Grävenitz, in seiner hieselbst im Jahr 1764 in Bützow zur Catheder gebrachten academischen Abhandlung, von der Bahn der Geschützkugeln, zum Grunde gelegt, worin er, nach Hrn. Eulers Vorschlag, zum practischen Gebrauch berechnete Tafeln liefert, und die nöthigen Regeln für die Anwendung in der Ausübung beyfügt. Nach Hrn. Robin hat der Hr. Ritter d'Arcy in den Jahren 1751 und 1752 andre Versuche angestellt, die den Robinschen ähnlich sind, und daraus scheinet ebenfalls zu folgen, daß die Newtonsche Theorie bey schnellen Bewegungen den Widerstand viel zu klein gebe. Er machte diese Versuche in einer kleinen Schrift: Essai d'une Theorie de l'Artillerie, bekannt. Diese Schrift ist von Hr. Lambert ins deutsche übersetzt, unter dem Titel: Versuch einer Theorie der Artillerie von Hrn. Ritter Arcy. 1766.

328 §.

Eben diese Schrift des Hrn. Ritter d'Arcy, nebst der Robinschen Artillerie, haben den Hrn. Lambert veranlasset, über den Widerstand der Luft neue Untersuchungen anzustellen, die er im Jahr 1766 zugleich mit der angeführten Uebersetzung der Artillerie des Hrn. d'Arcy, unter dem Titel bekannt machte:

Anmer-

Anmerkungen über die Gewalt des Schieſspulvers, und den Widerstand der Luft. Hier beurtheilet Hr. Lambert die Schlüsse der Herren Robin und d'Arcy, die sie aus ihren Versuchen gezogen haben, und zeiget mit seiner bekannten Scharfsinnigkeit, daß die Versuche keinesweges die Newtonsche Theorie so schlechterdings umstossen. Es soll hier nur vorläufig ein Begrif davon gegeben werden, worauf die Sache ankomme; unten in der Artillerie wird die Sache ausführlicher vorkommen. Herr Robin ließ ein hölzernes Pendul verfertigen, und hieng es dergestallt auf daß es frey, und ohne starkes Reiben schwanken konnte. Er schoß Flintenkugeln gegen das Pendul ab, welche es in Schwung brachten, und er hatte alles so eingerichtet, daß er die Grösse des dem Pendul von der Kugel mitgetheilten Schwunges messen konnte. Daraus berechnete er die Geschwindigkeit, welche die Kugel dem Pendul mitgetheilet hatte, und hieraus ferner, vermittelst der Lehre vom Stosse der Körper, die Geschwindigkeit selbst, womit die Kugel an das Pendul angeschlagen hatte. Des Hrn. d'Arcy Versuche sind den Robinschen ähnlich, nur braucht ersterer ein eisernes Pendul. Beyde Herren, Robin und d'Arcy, brauchen bey Berechnung der Geschwindigkeit der Kugel, aus der Geschwindigkeit des Penduls, die Gesetze des Stosses unelastischer Körper: aber Herr Lambert zeigt, daß man hiezu nicht so schlechterdings berechtigt sey, und daß vielmehr die Aenderung der Geschwindigkeit den Gesetzes des Stosses elastischer Körper, hier desto näher komme, je grösser die Geschwindigkeit ist, womit die Kugel anschlägt, so wie oben bereits im

240 §. erinnert worden. Aber eben dieser Umstand ist die einzige Ursache, weswegen die Versuche des Herrn Robins und d'Arcy der Newtonischen Theorie, so sehr entgegen zu seyn scheinen. Sie stimmen damit aufs schönste überein, wenn man die Geschwindigkeit der Kugel, aus der Geschwindigkeit des Penduls, den Gesetzen des Stosses elastischer Körper mehr oder weniger gemäß berechnet, nachdem ihre Geschwindigkeit grösser oder geringer gewesen ist.

Man siehet hieraus, wie interessant die angeführte Lambertsche Schrift in Absicht der Theorie vom Widerstande der Luft sey, und wie sehr sie die Aufmerksamkeit der Naturforscher verdiene. Es stehet mit dieser Schrift, ein andrer Aufsatz des Herrn **Lambert:** Memoire sur la resistance des fluides avec la solution du probleme balistique, in genauer Verbindung, welchen man im XXIT. der Histoire de l'Academie de Berlin pour l'année 1765, antrift. Er hat die Resultate seiner in diesem Aufsatz angestellten Rechnungen, besonders die Formuln für die Bewegung der Kugeln in der widerstehenden Luft, den Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers, als einen Anhang beygefügt. Seine Formuln lassen sich auf folgende Art mit den bisherigen Rechnungen vergleichen.

329 §.

Herr Lambert nennt in den Anmerkungen 105 S. das die Grösse des Widerstandes; oder sein absolutes Maaß, was nach Hr. Eulers Sprachgebrauch der doppelte Exponent des Widerstandes seyn würde (312 §). (Durch die absolute Grösse

des

des Widerstandes würde ich lieber das Gewicht derjenigen Säule des flüßigen verstehen, wodurch R im 301. 304. 308. 309 §. ausgedrückt werden muste). Es ist nemlich dieser Exponent $= \frac{kk}{4g}$, wenn k das bedeutet, was es im 311 § ausdrückte, und für die Kugel hat man $kk = \frac{3^2}{3} \cdot \frac{m}{n} rg$, wenn r ihr Halbmesser ist, und $\frac{m}{n}$ ausdrückt, wie vielmahl die Kugel specifisch schwerer, als die Luft sey. Daher wird $\frac{kk}{4g} = \frac{8}{3} \cdot \frac{m}{n} r$, und $2 \times \frac{kk}{4g} = \frac{8}{3} \cdot \frac{m}{n} 2r$. Schreibt man nun D statt $\frac{m}{n}$, und δ statt $2r$; so hat man Hr. Lamberts Ausdruck a. a. O. 105 S. Und wenn man dies weiß, so lassen sich die Formuln für die Bewegung der Kugel, die von keinen Kräften beschleunigt wird (107 S.), sehr leicht mit den Formuln des 317 und 318 §. vergleichen. Man darf nur beym Lambert $a = \frac{kk}{2g}$, $\gamma = h$, $v = c$ setzen: so hat man die hier berechneten Gleichungen. Die beyderseitigen Formuln für den Fall schwerer Körper in flüßigen Massen werde ich hier etwas genauer vergleichen. Sie stehen beym Lambert auf der 109 und 110 Seite, und hieselbst im 320. 321. 322. 323 §.

330 §.

330 §.

Es war im 321 §. $cc = kk\,p + (hh - kkp)\,e^{-\frac{4gx}{kk}}$, und wenn dem Körper im Anfang gar kein Stoß gegeben wird; so ist $h = 0$; also $cc = kkp\left(1 - e^{-\frac{4gx}{kk}}\right)$. Demnach nähert sich c der Grenze $k\sqrt{p}$, je grösser x genommen wird, und für $x = \infty$, wäre $c = k\sqrt{p}$. Diese Geschwindigkeit kann man sich also als die letzte vorstellen, die der Körper eigentlich nie erreicht. Man setze sie $= C$: so ist $C = k\sqrt{p}$, und $cc = CC\left(1 - e^{-\frac{4gx}{kk}}\right)$. Aber im 324 §. ist $p = 1 - \frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{n}{m} = 1 - \frac{1}{D} = \frac{D-1}{D}$, wenn $D = \frac{m}{n}$ ist (329 §). Nun sey $2gp = G$: so wird $G = \frac{2g(D-1)}{D}$, $p = \frac{G}{2g}$ und $C = \frac{k\sqrt{G}}{\sqrt{2g}}$. Ferner war $a = \frac{kk}{2g}$ (329 §), also $k = \sqrt{a}\sqrt{2g}$, und $C = \sqrt{aG}$. Setzt man nun a statt $\frac{kk}{2g}$, und aG statt CC; so erhält man

$$cc = aG\left(1 - e^{-\frac{2x}{a}}\right).$$

Daraus

Daraus folgt $1 - \frac{cc}{aG} = e^{-\frac{2x}{a}}$; also $l\frac{aG-cc}{aG} = -\frac{2x}{a}$, oder $\frac{2x}{a} = l1 - l\frac{aG-cc}{aG} = l\frac{aG}{aG-cc}$, und dies giebt

II) $x = \frac{1}{2}al\frac{aG}{aG-cc} = \frac{1}{2}al\frac{CC}{CC-cc}$.

Im 320§ war $c = \frac{(T+1)krp}{T+1}$, und $T = \frac{4gt^4p}{kk}$, $Ae^{\frac{4gt^4p}{kk}}$, $A = \frac{krp+h}{krp-h}$. Hier also wird $A = 1$, weil $h = 0$ ist. Ueberdem $krp = C$, und $\frac{C}{a} = \frac{2grp}{k}$. Dies giebt

III) $c = \frac{\left(e^{\frac{2C.t}{a}} - 1\right)C}{e^{\frac{2C.t}{a}} + 1}$.

Daraus folgt $C.e^{2Ct:a} + c = C.e^{2Ct:a} - C$, und $C + c = e^{2Ct:a}(C-c)$; also $e^{2Ct:a} = \frac{C+c}{C-c}$, und $\frac{2Ct}{a} = l\frac{C+c}{C-c}$, folglich

IV) $t = \frac{a}{2C}l\frac{C+c}{C-c}$.

Wenn man in der letzten Gleichung des 322 §. $A = 1$, $\frac{kk}{2g} = a$, und $\frac{2gr\sqrt{p}}{k} = \frac{C}{a}$ setzt; so hat man $x = \frac{1}{2}a\,l\left(\frac{1+e^{2Ct:a}}{2e^{Ct:a}}\right)^2$ $al\left(\frac{1}{2}e^{-Ct:a} + \frac{1}{2}e^{Ct:a}\right)$: also wird

V) $2e^{x:a} = e^{-Ct:a} + e^{Ct:a}$.

Setzt man aber in der letzten Gleichung des 323 §. $\frac{k}{2g\sqrt{p}} = \frac{a}{C}$, und $\frac{2g}{kk} = \frac{1}{a}$; so hat man $t = \frac{a}{C}\,l\,e^{\frac{x}{a}} + \sqrt{\left(e^{2x:a} - 1\right)}$, oder

VI) $e^{Ct:a} = e^{x:a} + \sqrt{(e^{2x:a} - 1)}$,

und dies sind die sechs Lambertschen Gleichungen.

331 §.

Einem festen Körper M, der in einer flüssigen Masse fortgeht, ist im Anfange der Zeit t die Geschwindigkeit h mitgetheilt, und eine unveränderliche Kraft P drückt diesem Körper beständig grade entgegen: man sucht eine Gleichung, welche die Geschwindigkeit c durch den in der Zeit t zurückgelegten Weg x ausdrückt, vorausgesetzt, daß der Exponent des Widerstandes bekannt sey.

Aufl. Man muß in den Gleichungen $\frac{4gx}{kk} = 1$

$= l \frac{kkp + hh}{kkp - cc}$, und $cc = kkp + (hh - kkp)$

$e^{-4gx:kk}$ des 321 § $p = \frac{P}{M}$, negativ nehmen:

so erhält man $\frac{4gx}{kk} = l \frac{kkp + hh}{kkp + cc}$, und $cc =$

$(kkp + hh)\, e^{-4gx:kk} - kkp$. Aus der letztern folgt

$kkp \cdot e^{4gx:kk} + cc\, e^{4gx:kk} = kkp + hh$; also $cc =$

$hh + kkp\,(4 - e^{4gx:kk})$ oder auch $cc = hh -$

$kkp\,(e^{4gx:kk} - 1)$.

Wenn demnach $kkp\,(e^{4gx:kk} - 1) = hh$ ist; so wird $c = o$, und diese Voraussetzung giebt $x = \frac{kk}{4g} l \frac{kkp + hh}{kkp}$. Grösser kann x nicht werden, weil sonst c unmöglich würde; daher muß von nun an x wieder abnehmen.

Ist M eine schwere Kugel, die vertical aufwärts geworfen wird: so kann man mit Hr. Lambert, wie im vor. §, $G = \frac{2g(D-1)}{D}$, $p = \frac{G}{2g}$, $a = \frac{kk}{2g}$, $C = k\sqrt{p} = \frac{k\sqrt{G}}{\sqrt{2g}}$ setzen, und man erhält $\frac{2x}{a} = l \frac{CC + hh}{CC + cc}$, also $cc = hh - CC\,(e^{2x:a} - 1)$. Die ganze Höhe, welche die Kugel erreichen kann, ist $x = \frac{1}{2} al \frac{CC + hh}{CC}$, weil für diese Höhe $c = o$ seyn muß: und wenn diese

Höhe gegeben ist; so bestimmt die zweyte Gleichung die Geschwindigkeit h, womit man die Kugel aufwärts werfen muß, damit sie diese Höhe erreiche. Es wird nemlich $h = \mathfrak{C}\sqrt{(e^{2x:a} - 1)}$.

Um aus der gegebenen Zeit t die Geschwindigkeit c zu finden, könnte man ein ähnliches Verfahren anbringen. Man könnte in der Gleichung

$$\frac{4gt\sqrt{p}}{k} = l\frac{k\sqrt{p}+c}{k\sqrt{p}-c}$$ des 320 § p negativ setzen: so würde $$\frac{4gt\sqrt{-p}}{k} = l\frac{k\sqrt{-p}+c}{k\sqrt{-p}-c}$$ gefunden werden. Nun ist zwar in dieser Gleichung $\sqrt{-p} = p\sqrt{-1}$, eine unmögliche Grösse (190 §. A. R.): wenn man aber diese Gleichung gehörig entwickelt; so fallen die unmöglichen Theile alle weg, und es läst sich sowohl t durch c, als auch umgekehrt c durch t vermittelst möglicher Grössen ausdrücken. Wie man in solcher Absicht mit dieser Gleichung umgehen müsse, läst sich hier noch nicht zeigen. Man kann inzwischen, aus der Differential-Gleichung

$$2gdt = -\frac{dc}{p+cc:kk}$$ (320 §) vermittelst einer andern Integrations-Regel das gesuchte finden.

332 §.

191 Fig. 1 Wenn im Kreise ABDE, dessen Halbmesser CA $= 1$ ist, $CP = z$, $PM = y$, und der Bogen $AM = s$ gesetzt wird; so ist $ds = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, und

$$s = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$$ (257 §). Es ist aber $CP =$

$z =$

$z = \sin s$; also umgekehrt $s = A \sin z$, wenn der Ausdruck $A \sin z$ einen mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Bogen bedeutet, dessen Sinus $= z$ ist. Man kann die Ausdrücke $A \cos z$, $A \tang z$, $A \cot z$ u. s. f. in ähnlicher Bedeutung gebrauchen, und die Gleichung $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = s$ läst sich so ausdrücken, $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} = A \sin z$.

Es sey nun $\varphi = A \tang u$: so ist $u = \tang \varphi$, also $\cot \varphi = \frac{1}{u}$, $\operatorname{cosec} \varphi = \frac{\sqrt{(1+uu)}}{u}$, und $\sin \varphi = \frac{u}{\sqrt{(1+uu)}}$. Man setze $\frac{u}{\sqrt{(1+uu)}} = z$: so ist $\sin \varphi = z$, und $\varphi = A \sin z$, folglich $d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$. Nun ist $z = u(1+uu)^{-\frac{1}{2}}$, also $dz = (1+uu)^{-\frac{1}{2}} du + ud.(1+uu)^{-\frac{1}{2}}$, und $d.(1+uu)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(1+uu)^{-\frac{3}{2}}.2udu$ (314 §) $= -\frac{udu}{r(1+uu)^3}$. Daher wird $dz = \frac{du}{(1+uu)^{\frac{1}{2}}} - \frac{uudu}{(1+uu)^{\frac{3}{2}} r}\left(1 - \frac{uu}{1+uu}\right) = \frac{du}{(1+uu)^{\frac{3}{2}}} : \frac{1}{(1+uu)^{\frac{1}{2}}}$; oder $d\varphi = \frac{du}{1+uu}$, d. i.

$d.\mathrm{A\,tang}u = \frac{du}{1+uu}$; folglich $\int \frac{du}{1+uu} = \mathrm{A\,tg}u$.

Wäre der Bogen $\varphi = \mathrm{A\,cos}x$, so wäre der Sinus eben dieses Bogens $= \sqrt{(1-xx)}$. Setzt man nun $\sqrt{(1-x^2)} = z = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, also $dz = -\frac{1}{2}(1-xx)^{-\frac{1}{2}} . 2xdx = -\frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}}$;

so ist auch $\varphi = \Lambda\,\mathrm{sin}z$, also $d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$

$= -\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, oder $d.\mathrm{A\,cos}x =$

$= \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, und $\mathrm{A\,cos}x = C - \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Wäre aber der Bogen $\varphi = \mathrm{A\,cot}y$, so wäre die Tangente dieses Bogens $= \frac{1}{y}$. Man setze $\frac{1}{y}$

$= u$, also $-\frac{dy}{yy} = du$, so ist $\varphi = \mathrm{A\,tang}u$, und

$d\varphi = \frac{du}{1+uu} = -\frac{dy}{1+yy}$, oder $d.\mathrm{A\,cot}y$

$= -\frac{dy}{1+yy}$, folglich $\mathrm{A\,cot}y = C - \int \frac{dy}{1+yy}$.

Man findet auf eben die Art, es sey $d.\mathrm{A\,sec}x =$ $\frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Denn es ist $\mathrm{A\,sec}x = \mathrm{A\,cos}\frac{1}{x}$,

also $d.\mathrm{A\,sec}x = -\frac{d.x^{-1}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)}} =$

$\frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Ferner ist $A\,\mathrm{cosec}\,x = A\,\sin\frac{1}{x}$,

also wird $d.A\,\mathrm{cosec}\,x = \frac{d.x^{-1}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)}} =$

$= -\frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}}$. Und weil $A\,\mathrm{sv}x = A\,\mathrm{cos}(1-x)$,

so ist $d.A\,\mathrm{sv}x = -\frac{d.(1-x)}{\sqrt{(2x-xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$.

333 §.

Bey den Voraussetzungen des 331 § eine Gleichung zwischen c und t zu finden.

Aufl. Wenn man im 320 § p negativ nimmt: so hat man $2g\,dt = -\frac{dc}{p+cc:kk}$; oder $\frac{2g}{kk}\,dt$

$= -\frac{dc}{kkp+cc} = -\frac{dc:kkp}{1+cc:kkp}$. Wenn man nun $\frac{c}{k\sqrt{p}} = u$ setzt; so hat man $\frac{dc}{k\sqrt{p}} = du$,

und $\frac{2g\sqrt{p}}{k}\,dt = -\frac{du}{1+uu}$. Hievon ist das

Integral $\frac{2gt\sqrt{p}}{k} = E - A\,\mathrm{tang}\,u$ (332 §) $=$

$E - A\,\mathrm{tang}\frac{c}{k\sqrt{p}}$. Im Anfange der Zeit t war

$c = h$; also ist $C = A\,\mathrm{tang}\frac{h}{k\sqrt{p}}$, und $\frac{2gt\sqrt{p}}{k} =$

$$= A\,\text{tang}\frac{h}{k\sqrt{p}} - A\,\text{tang}\frac{c}{k\sqrt{p}}.$$

Es ist also $\frac{2gt\sqrt{p}}{k}$ der Unterscheid zweener Kreisbogen, wovon des einen Tangente $= \frac{h}{k\sqrt{p}}$, und des andern Tangente $= \frac{c}{k\sqrt{p}}$ ist. Man setze den ersten Bogen $= \eta$, den andern $= \vartheta$, ihre Differenz $= \delta$, also $\delta = \eta - \vartheta$: so hat man $\text{tang}\delta = \frac{\text{tang}\eta - \text{tang}\vartheta}{1 + \text{tang}\eta \cdot \text{tang}\vartheta}$, d. i. $\text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k} = \frac{h-c}{k\sqrt{p}} : \left(1 + \frac{hc}{kkp}\right) = \frac{h-c}{k\sqrt{p}} : \frac{kkp+hc}{kkp}$;

oder $\text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k} = \frac{(h-c)k\sqrt{p}}{kkp+hc}$. Daraus folgt $kkp\,\text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k} + hc \cdot \text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k} = hk\sqrt{p} - kc\sqrt{p}$; und dies giebt ferner

$$c = \frac{hk\sqrt{p} - kkp \cdot \text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k}}{h\,\text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k} + k\sqrt{p}}.$$

Demnach wird $c = 0$, wenn $k\sqrt{p}\,\text{tg} \cdot \frac{2gt\sqrt{p}}{k} = h$ wird, und daraus ergiebt sich die ganze Zeit, binnen welcher der Körper der ursprünglichen Richtung der Geschwindigkeit h folget, da er dann hiernächst wieder

der umkehret. Es wird nemlich $\text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k} = \frac{h}{k\sqrt{p}}$; also $\frac{2gt\sqrt{p}}{k} = \text{Atang}\frac{h}{k\sqrt{p}}$, und $t = \frac{k}{2g\sqrt{p}}\text{Atang}\frac{h}{k\sqrt{p}}$.

Ist wiederum M eine schwere Kugel, die man vertical aufwärts wirft; und es bleibt $G = \frac{2g(D-1)}{D}$, $p = \frac{G}{2g}$, $a = \frac{kk}{2g}$, $C = k\sqrt{p}$; also $\frac{a}{C} = \frac{k}{2g\sqrt{p}}$: so ist die Zeit des Steigens $t = \frac{a}{C}\text{Atang}\frac{h}{C}$, und $h = C.\text{tg}\frac{C.t}{a}$.

334 §.

Bey eben den Voraussetzungen des 331 § eine Gleichung zwischen x und t zu finden.

Aufl. Wenn man in die Gleichung $\frac{4gx}{kk} = l\frac{kkp+hh}{kkp+cc}$ (331 §) den Werth $cc = \frac{\left(hk\sqrt{p} - kkp.\text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k}\right)^2}{\left(k\sqrt{p}+h\text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k}\right)^2}$, aus dem 333 § setzt: so erhält man x durch t.

Ist M eine schwere vertical aufwärts geworfene Kugel, und man setzt, wie bisher, $\frac{kk}{2g} = a$,

$kr\,p = C$, $\frac{2gr\,p}{k} = \frac{C}{a}$; so hat man $\frac{2x}{a} = l\frac{CC+hh}{CC+cc}$, und

$$CC+cc = C^2 + \frac{C^2\left(h - C\,tang\frac{C.t}{a}\right)^2}{\left(C+h.tang\frac{C.t}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{C^2\left(C+htg\frac{Ct}{a}\right)^2 + C^2\left(h - C.tg\frac{C.t}{a}\right)^2}{\left(C+htang\frac{C.t}{a}\right)^2}$$

$$\text{also } \frac{2x}{a} = l\frac{(CC+hh)\left(C+htang\frac{C.t}{a}\right)^2}{C^2\left(C+htg\frac{C.t}{a}\right)^2 + C^2\left(h - C.tg\frac{C.t}{a}\right)^2}$$

Setzt man nun $h = C.tang\frac{C.t}{a}$, so ist t die Zeit, welche der grösten Höhe zugehört, auf welche der Körper steigen kann; und man erhält

$$\frac{2x}{a} = l\frac{CC+hh}{C^2} = l\frac{CC\left(1+\left(tg\frac{C.t}{a}\right)^2\right)}{C^2}$$

$$\text{oder } \frac{x}{a} = l\sqrt{\left(1+\left(tg.\frac{C.t}{a}\right)^2\right)} = l\,sec.\frac{C.t}{a}.$$

Will

Will man t durch x ausdrücken; so dient hiezu die Gleichung $\text{tang}\frac{2gt\sqrt{p}}{k} = \frac{(h-c)k\sqrt{p}}{kkp+hc}$ (333 §), wo man $c = \sqrt{(hh - kkp(e^{4gx:kk} - 1))}$ setzen muß. Wenn nun M eine vertical aufwärts steigende Kugel ist, und man behält die bisherigen Bezeichnungen bey: so wird

$$\text{tang}\frac{C.t}{a} = \frac{hC - C\sqrt{(hh - CC(e^{2x:a} - 1))}}{CC + h\sqrt{(hh - CC(e^{2x:a} - 1))}},$$

$$\text{also } \frac{C.t}{a} = \text{Atg}\frac{hC - C\sqrt{(hh - CC(e^{2x:a} - 1))}}{CC + h\sqrt{(hh - CC(e^{2x:a} - 1))}}.$$

Wenn t diejenige Zeit ist, welche der grösten Höhe x zugehört, so ist $c = 0$; also $hh = CC(e^{2x:a} - 1,)$ und $\frac{C.t}{a} = \text{Atang}\frac{h}{C} = \text{Atg}\sqrt{(e^{2x:a} - 1)}$.

Dies giebt $\sqrt{(e^{2x:a} - 1)} = \text{tang}\frac{C.t}{a}$; und $e^{x:a} = \text{sec}\frac{C.t}{a}$; also $\frac{C.t}{a} = \text{Asec}\, e^{x:a}$.

335 §.

Ein schwerer Körper wird aus B nach BA, mit der Geschwindigkeit h vertical aufwärts geworfen: man sucht die Geschwindigkeit, womit er im Herunterfallen in B wieder anlangt. 138 Fig.

Aufl. Es sey die gröste Höhe, die der Körper erreicht, $AB = b$. Wenn er nun beym Fallen in B die

die Geschwindigkeit c hat; so ist $b = \frac{1}{2} a l \frac{CC}{CC - cc}$ (330 §). Aber auch $b = \frac{1}{2} a l \frac{CC + hh}{CC}$ (331 §) und beyde Werthe gleich gesetzt geben $C^2h^2 - C^2c^2 - c^2h^2 = 0$, und hieraus folgt

$$cc = \frac{C^2h^2}{C^2 + h^2}.$$

Aus den beyden gebrauchten Gleichungen folgt auch $e^{2b:a} = \frac{CC}{CC - cc} = \frac{CC + hh}{CC}$. Weil nun $C^2 + h^2 = \frac{C^2 . h^2}{c^2}$: so wird $e^{2b:a} = \frac{h^2}{c^2}$, und $\frac{2b}{a} = l \frac{h^2}{c^2}$, oder $\frac{x}{a} = l \frac{h}{c}$.

Wenn also beyde Geschwindigkeiten bekannt sind; so hat man die Höhe, worauf der Körper gestiegen ist; aus der Gleichung $x = al \frac{h}{c}$.

Ist nun die ganze Zeit des Steigens durch die Höhe BA $= \tau$; und die Zeit des Herunterfallens von A bis B, $= t$: so hat man

$$\tau = \frac{a}{C} \text{ A.tang} \frac{h}{C} \text{ (333 §)}$$

$$t = \frac{a}{2C} l \frac{C + c}{C - c} \text{ (330 §).}$$

Dies giebt $\tau + t = \frac{a}{C} \left(\text{A.tang} \frac{h}{c} + \frac{1}{2} l \frac{C + c}{C - c} \right)$,

als die gesammte Zeit, welche der Körper in der Luft schwebend zubringt. Könnte man also die Geschwin-

schwindigkeit bestimmen, womit z. E. eine Kugel, die aus einer Canone vertical aufwärts geschossen wird, zur Mündung herausfährt; so liessen sich daraus 1) die Geschwindigkeit, womit sie wieder zu Boden schlägt. 2) Die Höhe, auf welche sie gestiegen ist, und 3) die ganze Zeit, die sie unterweges zubringt, vermittelst dieser Formuln berechnen.

336 §.

Um diese Rechnung mit Vortheil zu führen, dienen folgende Schlüsse. Es sey $A\,\text{tang}\frac{h}{C} = \frac{1}{2}\pi - 2\omega$: so ist $\frac{h}{C} = \cot.2\omega$, und $\frac{C}{h} = \text{tg}.2\omega$;

Weil nun $\frac{cc}{CC} = \frac{h^2}{C^2+h^2}$ (335 §) $=$

$\frac{h^2:C^2}{1+h^2:C^2}$; so ist auch $\frac{cc}{CC} = \frac{\cot 2.\omega^2}{\text{cosec}\,2\omega^2} =$

$\cot 2\omega^2.\sin 2\omega^2 = \cos 2\omega^2$, und $\frac{c}{C} = \cos 2\omega$.

Man hat also $\frac{C}{h} \times \frac{c}{C} = \frac{c}{h} = \text{tg}.2\omega.\cos 2\omega$

$= \sin 2\omega$; also $\frac{h}{c} = \text{cosec}\,2\omega$. Ferner wird $\frac{C+c}{C-c}$

$\frac{1+c:C}{1-c:C} = \frac{1+\cos 2\omega}{1-\cos 2\omega} = \cot.\omega^2$ (459 §. G.);

und wenn man diese Werthe in die letzte Gleichung des vor. § setzt: so erhält man folgende:

$$\tau + t = \frac{a}{C}\left(\tfrac{1}{2}\pi - 2\omega + \tfrac{1}{2} l \cot\omega^2\right),$$

oder $\tau + t = \frac{a}{C}\left(\tfrac{1}{2}\pi - 2\omega + l\cot\omega\right)$.

Ist nun h gegeben, so findet man erstlich ω aus der Gleichung $\text{tang}\, 2\omega = \frac{C}{h}$, daraus sich denn nicht allein $\tau + t$, sondern auch $c = C.\text{cos}\, 2\omega$, und $x = a\, l\frac{h}{c} = a\, l\,\text{cosec}\, 2\omega$ finden läst. Will man die Zeit des Steigens und Fallens jede besonders haben: so hat man $\tau = \frac{a}{C}\left(\tfrac{1}{2}\pi - 2\omega\right)$, und $t = \frac{a}{C} l\cot\omega$.

337 §.

Eine dreypfündige eiserne Kugel, die im Durchmesser 0,2375 Engl. Fusse hielte, ist aus einer Canone, die 32 Caliber lang war, mit einer Ladung Pulver von 2 Unzen grade aufwärts geschossen: man sucht, wie hoch sie gestiegen und gefallen, imgleichen, mit welcher Geschwindigkeit sie wieder zu Boden gefallen ist.

Aufl. In der Artillerie wird gewiesen werden, wie man aus der gegebenen Pulverladung, dem Durchmesser der Kugel (der in der Artillerie ihr Caliber heist) und ihrem Gewicht, nebst der Länge der Canone, die Geschwindigkeit berechnen könne, womit die Kugel zur Mündung herausfährt. Man würde sie im gegenwärtigen Exempel etwa von 654 Rh. Fuß in einer Secunde befinden. Daher setze man

man $h = 654$ Rheinl. Fuß: so läst sich alles übrige nach dem vorigen § berechnen. Zuerst suche man $a = \frac{kk}{2g}$ (330 §). Weil nun $kk = \frac{8}{3} \cdot \frac{m}{n} 2r \cdot 2g$, (318 §) wenn r der Halbmesser der Kugel ist: so hat man $a = \frac{8}{3} \cdot \frac{m}{n} \cdot 2r = \frac{8}{3} D \cdot 2r$ (330 §). Nun ist hier $2r = 0{,}2375$ Engl. Fuß, welche nach dem 198 § R. reducirt, 0,23048 Rh. F. geben. Die gröste Schwürigkeit ist nun $D = \frac{m}{n}$ richtig zu bestimmen, wie vielmahl nemlich die Kugel specifisch schwerer, als die Luft sey, da die eigene Schwere der Luft so sehr veränderlich ist. Wenn man alles genau nehmen wollte; so müste man den Umstand noch mit in Rechnung bringen, daß die Kugel im Steigen beständig in dünnere Luftschichten kommt, und also D nicht einmahl eine beständige Grösse bleibt. Das Guerickische Manometer (92 § Aerost.) würde dienen, für jeden besondern Fall die Dichtigkeit der Luft zu beobachten. Nimmt man die Luft 800mahl dichter, als Wasser (86 § Aerost.), und das Eisen 7,645mahl schwerer, als Wasser, an (46 § Hydrost.); so wird $D = 6116$, und $a = 3760{,}767$. Weil ferner $\frac{D - 1}{D}$ beynahe $= 1$ ist, so kann man $G = \frac{2g \cdot (D - 1)}{D}$ (330 §) $= 2g = 31{,}25$ Rh. F. setzen, und die fernere Rechnung giebt

$la =$

$$\begin{array}{rl} l\,a = & 3{,}5751610 \\ l\,G = & 1{,}4948500 \\ \hline & 5{,}0700110 \\ l\sqrt{aG} = & 2{,}5350055 = l\,C \\ l\,h = & 2{,}8155777 \\ \hline l\,\mathrm{tab}\,\frac{C}{h} = & 9{,}7194278 = l\,\mathrm{tang}\,2\omega. \end{array}$$

Also $2\omega = 27° 39\frac{7'}{12}$, und $\frac{1}{2}\pi - 2\omega = \frac{37}{54}\frac{40}{00}$.

$\frac{1}{2}\pi$. Dies giebt $\tau = \frac{37}{54}\frac{40}{00}\,\frac{a}{C}\,.\,\frac{1}{2}\pi$, und man findet

$$\begin{array}{rl} l\,\frac{1}{2}\pi = & 0{,}1961198 \text{ (467 §. A. R.)} \\ l\,a = & 3{,}5751610 \\ l\,3740 = & 3{,}5728716 \\ \hline & 7{,}3441524 \\ l\,C = & 2{,}5350055 \\ l\,5400 = & 3{,}7323938 \\ \hline & 6{,}2673993 \\ \hline l\,\tau = & 1{,}0767531 \end{array}$$

also $\tau = 11{,}933$ Sec.

Weiter wird $\omega = 13° 49'$, und

$l\cot\omega - l\tau = 0{,}6091849$

mult. mit $2{,}302585$ (163 §. A. R.)

$$\begin{array}{r} 1{,}2183698 \\ 1827554 \\ \hline 12182 \\ 3045 \\ 480 \\ 30 \\ \hline \end{array}$$

$l\,\mathrm{nat}\cot\omega = 1{,}402799$ fast $= 1{,}4028$

l 1,4028 = 0,1469958
la = 3,5751610

3,7221568
lC = 2,5350055

lt = 1,1871513

Also wird t = 15,387, und $\tau + t$ = 27,32 Secunden. Ferner ist

$l \cos 2\omega$ = 9,9473352 — 10
lC = 2,5350055

lc = x2,4823407
und c = 303,63 Rh. F.

Aber $l \operatorname{cosec} 2\omega - lr$ = 0,3334172
mult. mit 2,302585

0,6668344
1001251
6668
1165
264
15

l nat $\operatorname{cosec} 2\omega$ = 0,7677707

l 0,7677707 = 0,8852311 — 1
la = 3,5751610

lx = 3,4603921
also x = 2886,6 Rh. Fuß.

338 §.

Man hat zu Petersburg mit verticalen Canonenschüssen Versuche angestellt, um durch Hülfe derselben die Theorie vom Widerstande der Luft, und der Gewalt des Schießpulvers, zu berichtigen. Herr

Bernoulli beschreibt diese Versuche im II Tomo der Comment. Acad. Imp. Petrop. und das im vor § berechnete Exempel ist eines von den daselbst angeführten. Man hatte aber bey diesem Versuch 34 Secunden gezählt, ehe die Kugel wieder zu Boden fiel, und die Vergleichung mit der Berechnung des vor. § ergiebt, daß dieser Versuch sehr weit von der Theorie abweiche, indem für $\tau + t$ nur 27,32 Sec. gefunden sind; dafern anders die angenommene anfängliche Geschwindigkeit der Kügel von 654 Fussen, würklich diejenige ist, die ihr von der Gewalt des Pulvers mitgetheilet worden. Die Sache soll unten in der Artillerie näher untersucht werden. Uebrigens ist nur noch zu bemerken, daß Versuche von dieser Art viel brauchbarer seyn würden, die Theorie zur völligen Richtigkeit zu bringen, wenn man ausser der Zeit noch ein andres datum unmittelbar aus der Beobachtung haben könnte; z. E. die gröste Höhe, welche die Kugel beym Steigen erreicht, oder die Geschwindigkeit, womit sie zu Boden schlägt; oder auch selbst die Geschwindigkeit, welche ihr die Gewalt des Pulvers mittheilt; oder endlich die Zeit des Steigens und Fallens; jede besonders. Man sehe Lamberts Anmerkungen 66 §.

Der

Der XXI. Abschnitt.

Von

der Ueberwucht bey Maschinen, die durch Gewichte bewegt werden.

339 §.

Eine der gemeinnützigsten Anwendungen der bisher vorgetragenen allgemeinen mechanischen Theorien ist die Betrachtung der Maschinen, und derjenigen Bewegungen, welche nach der jedesmahligen Absicht der Maschinen durch dieselben zuwege gebracht werden sollen. Die Theorie von den Maschinen ist sehr unvollkommen, welche in den Lehrbüchern der Anfangsgründe gewöhnlich vorgetragen wird, weil man fast durchgängig nur den Stand des Gleichgewichts für Kraft und Last sucht, die Friction mit zur Last gerechnet; hiernächst aber, wenn die Last würklich bewegt werden soll, für die Ueberwucht kein andres Gesetz hat, als dieses, daß die Kraft grösser seyn müsse, als zum Gleichgewicht mit der Last und Friction erfordert wird. Weil übrigens das Cartesische Grundgesetz der Statik (43 §. St.) gehörig angewandt, seine Richtigkeit hat: so hat man sich begnügt, daraus die Regel zu schliessen, daß so viel an der Geschwindigkeit, womit die Last beweget werde, verlohren gehe, so viel man durch Verminderung der Kraft, vermittelst der Maschine gewinne. Die folgenden Untersuchungen werden ergeben, daß die Geschwindigkeit der Last auch auf die Beschaffenheit

der Maschine selbst ankomme, und deswegen die gedachte Regel viele Einschränkungen leide. In der That läst sich auch die Theorie von den Maschinen in solchen Handbüchern nicht vollständiger abhandeln, worin blos die Anfangsgründe der Rechenkunst und Geometrie als bekannt vorausgesetzt werden. Man hat diesen Theil der Mechanik nur seit der Zeit zu mehrerer Vollkommenheit bringen können, da die Herrn Bernoulli und Euler die Gesetze der Bewegung fester Körper von bestimmter Gestalt und Grösse erfunden haben, und eine solche Ausführung der hieher gehörigen Lehren, die einigermassen practisch brauchbar seyn soll, erfordert nothwendig mehrere theoretische Kenntnisse, als diejenigen, welche in den kurzen Lehrbüchern der Elementar-Mathematik gemeiniglich nur vorgetragen werden. Man kann auch durch dies Beyspiel überzeugt werden, daß die höhern Theorien der Mathematik nicht in die Klasse unnöthiger Speculationen gehören.

340 §.

164 Fig. Der Kreiß *EKFL* sey die Grundfläche eines senkrechten Cylinders, der sich um seine geometrische Axe deehet: man sucht das Moment der Masse dieses Cylinders gegen die Umdrehungsaxe.

Aufl. Es sey die Dichtigkeit des Cylinders $= \delta$, der Halbmesser seiner Grundfläche $GF = r$, seine Höhe $= a$. Ferner sey ADBH die Grundfläche eines concentrischen Cylinders von eben der Höhe, und seiner Grundfläche Halbmesser $GM = z$, seine Masse $= M$. Wenn nun dieser Halbmesser um das Stück $Mz = \Delta z$ wächst; so wächst der Cylinder

um

um eine cylindrische Röhre (374 §. G.), deren Dicke Δz, und deren Masse $= \Delta M$ ist. Weil nun der Inhalt dieser Röhre $= \pi a((z+\Delta z)^2 - z^2) = \pi a(2z\Delta z - \Delta z^2)$ befunden wird: so ist $\Delta M = \delta\pi a(2z\Delta z + \Delta z^2)$. Nun sey μ das Moment der Masse des Cylinders, und man siehet leicht, daß dies Moment zwischen den Grenzen $zz\Delta M$ und $(z+\Delta z)^2\Delta M$, enthalten, folglich der Verhältnisse $\frac{\Delta\mu}{\Delta M}$ Grenze $\frac{d\mu}{dM} = zz$ sey. Dies giebt $\frac{d\mu}{2\pi\delta a z dz} = zz$, oder $d\mu = 2\delta.\pi a z^3 dz$, und man findet durch die Integration $\mu = \frac{1}{2}\delta\pi a z^4$. Setzt man nun $z = r$, so hat man das gesuchte Moment der Masse des Cylinders über EKFL $= \frac{1}{2}\pi\delta a r^4 = \frac{1}{2}rrM$, weil $M = \delta\pi rra$.

341 §.

Am Umfang des Rades *ADE* hängt die Masse *P*, und ihr Gewicht ist *p*; am Umfang der zugehörigen horizontalliegenden Welle *BFG* hängt die Masse Q und ihr Gewicht ist *q*; das Gewicht *p* überwiegt *q*: man sucht die Umdrehungsbeschleunigung des Rades für jede gegebene Zeit *t*.

Aufl. Das Moment der Trägheit des Rades und der Welle gegen die Umdrehungsaxe sey $= Mkk$. Wenn nun *a* und *b* des Rades und der Welle Halbmesser sind: so sind Paa und Qbb der Massen P und Q Momente der Trägheit, und weil es hier eben so viel ist, als ob die Massen P und Q unmittelbar in A und B befindlich wären: so ist der ganzen Maschi-

ne Moment der Trägheit $= Mkk + Paa + Qbb$. Ist nun überdem die Friction am Umfang der Welle, die hier keine Zapfen hat, $= F$: so ist das statische Moment des Gewichts $p = ap - b(q + F)$. Die Massen P und Q werden hier deswegen von ihren Gewichten unterschieden, damit die Untersuchung nicht blos auf herabhängende Gewichte eingeschränkt sey. Wenn die schwere Masse Q auf einer horizontalen Ebene läge, und vermittelst der Schnur FQ, die um die Welle geht, horizontal fortgezogen würde; so wäre $q = o$; aber nicht $Q = o$. Wenn an der Schnur AP eine andre dem Gewicht p gleiche Kraft, z. E. eines Menschen zöge: so wäre die Masse $P = o$; aber nicht $p = o$. Statt der Friction F, die eigentlich am Umfang der Welle entstehet, kann man auch diejenige Kraft φ in Rechnung bringen, die am Umfang des Rades der Friction F das Gleichgewicht hielte. Diese wäre $= \frac{b}{a} F$; also $F = \frac{a}{b} \varphi$, und des Gewichts p Moment $= a(p - \varphi) - bq$. Am Ende der Zeit t sey die Winkelgeschwindigkeit der Maschine $= \gamma$: so hat man die Umdrehungsbeschleunigung $\frac{d\gamma}{2g\,dt} = \frac{a(p - \varphi) - bq}{Mkk + Paa + Qbb}$ (162 §).

Die Tiefe, um welche die Masse P in einer Secunde sinkt, ist so groß, als der Bogen, welchen ein Punct A im Umfange des Rades in einer Secunde durchläuft. Weil nun die wahre Beschleunigung

für

für jeden Punct im Umfange des Rades $\frac{ady}{2gdt}$

$= \frac{a(p-\varphi)-bp}{Mkk+Paa+Qbb}$. a ist (158 §.); so giebt eben dieser Ausdruck die Beschleunigung der Masse P. Man setze $ad\gamma = dc$; so ist $a\gamma = c$ der Masse p Geschwindigkeit für jede gegebene Zeit t, und man hat $dc = \frac{2ga(a(p-\varphi)-bq)}{Mkk+Paa+Qbb}dt$ für die Bewegung der Masse P; also $c = \frac{a(p-\varphi)-bq}{Mkk+Paa+Qbb}.2gat$, vorausgesetzt, daß nicht allein p und q, sondern auch φ unveränderlich bleibe.

Die Beschleunigung der Last Q wird $= \frac{bd\gamma}{2gt}$, und für jede gegebene Zeit t ihre Geschwindigkeit $= \frac{a(p-\varphi)-bq}{Mkk+Paa+Qbb}.2gbt$.

342 §.

Je kleiner in dem letzten Ausdruck b genommen wird, desto kleiner wird die Geschwindigkeit der Last für eben die Zeit t, und sie verschwindet, wenn $b = 0$ wird, wie auch aus der Natur der Sache klar ist. Eben der Ausdruck wächst anfangs, wenn b wächst, verschwindet aber aufs neue, wenn $b = \frac{a(p-\varphi)}{q}$ wird. Daher wird es für b einen gewissen Werth geben, für welchen die Geschwindigkeit der Last am grösten wird. Könnte man diesen Werth finden, der statt b gesetzt werden muß, wenn der gefundene

Ausdruck für die Geschwindigkeit am grösten wird, so würde es ohne Zweifel am vortheilhaftesten seyn, bey eben der Kraft und Last an eben dem Rande, dem Halbmesser der Welle diese Grösse zu geben. Um diesen Werth zu finden, muß man b als eine veränderliche Grösse betrachten, wovon der Ausdruck $\frac{(a(p-\Phi)-bq)\,2gbt}{Mkk+Paa+Qbb}$ eine Function ist, da dann die Sache ferner auf die Auflösung der folgenden allgemeinen Aufgabe ankommt.

343 §.

Es ist eine Function y der veränderlichen Grösse x gegeben: man soll finden, welchen Werth man statt x setzen muß, damit y am grösten werde.

Aufl. Man kann x als die Abscisse, und y als die Ordinate einer gewissen Linie betrachten, deren Natur die Gleichung zwischen x und y ausdrückt
199 (108 §). Es sey AM_μ diese Linie, und $AP = x$,
Fig. $PM = y$. Durch M sey eine Tangente dieser Linie MT gezogen, welche die Axe der Abscissen in T schneidet. Wenn nun die Ordinate $y = PM$ mit der Abscisse $AP = x$ wächst: so nimmt der Winkel MTP ab. Wird $y = CD$ am grösten, wenn $x = AC$ genommen wird: so wird die Tangente MT mit der Abscissenlinie parallel, und $MTP = 0$, also auch $\text{tang}\,MTP = 0$. Es ist aber $\text{tang}\,MTP = \frac{dy}{dx}$ (309 §). Wenn also y am grösten ist: so muß $\frac{dy}{dx} = 0$ seyn. Hieraus folgt nun zwar nicht

nicht umgekehrt, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, daß y alsdenn allemahl den gröſten Werth habe. Es lieſſe sich auf eben die Art zeigen, daß bey eben der Voraussetzung zuweilen y den kleinſten Werth haben könne. Ja in manchen Fällen giebt dieſe Voraussetzung weder den gröſten, noch den kleinſten Werth. Indeſſen läſt sich doch der Sache so ein Genüge leiſten:

Man setze $\frac{dy}{dx} = 0$, und suche den Werth von x, den dieſe Gleichung bestimmt. Gesetzt dieſer Werth sey $x = f$: so setze man f in die Function y statt x, und suche ihren zugehörigen Werth. Hierauf setze man $f+e$ und $f-e$ statt x, so daß e nur einen sehr kleinen Bruch bedeutet. Kommt nun in beyden Fällen ein Werth für y heraus, der kleiner iſt, als wenn man $x = f$ setzt: so iſt der gesuchte Werth von x richtig gefunden.

Es sey z. E. $yy = 2ax - xx$: so wird $ydy = adx - xdx$, und $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. Dies $= 0$ gesetzt, giebt $x = a$. Die Voraussetzung $x = a+e$ giebt $yy = 2aa + 2ae - aa - 2ae - ee = aa - ee$, und die Voraussetzung $x = a-e$ giebt $yy = 2aa - 2ae - aa + 2ae - ee = aa - ee$; also beydemahl $y < a$. Folglich wird y am gröſten, wenn $x = a$ iſt, wie auch aus der Natur des Kreiſes klar iſt, dem dieſe Gleichung zugehört. Die Differentialrechnung giebt noch bequemere Hülfsmittel an die Hand, wie man die Prüfung anstellen kann, ob der gefundene Werth von x den gröſten oder kleinſten Werth von y gebe.

344 §.

Es ist der Halbmesser des Rades, nebst Kraft und Last gegeben, man suche, wie groß der Halbmesser der Welle seyn muß, damit die Last am geschwindesten bewegt werde.

Aufl. Man setze in dem Ausdruck für die Beschleunigung der Last $\frac{bdy}{2gdt} = \frac{ab(p-\varphi)-qbb}{Mkk+Paa+Qbb}$ den Halbmesser der Welle $b = x$, und betrachte ihn als eine veränderliche Grösse. Hierauf suche man nach dem 343 §, wie groß x genommen werden muß, damit diese Beschlennigung am grösten werde. In solcher Absicht setze man den Zähler dieses Ausdrucks $a(p-\varphi)x - qxx = y$; den Nenner $Mkk + Paa + Qbb = z$: so ist $\frac{y}{z} = yz^{-1}$, und

$$d.\frac{y}{z} = z^{-1}dy - yz^{-2}dz = \frac{dy}{z} - \frac{ydz}{zz} = \frac{zdy - ydz}{zz}.$$

Es wird aber $dy = a(p-\varphi)dx - 2qxdx$, und $dz = 2Qxdx$; also $d.\frac{y}{z} =$

$$[(Mkk + Paa + Qxx)(a(p-\varphi)dx - 2qxdx) - 2(a(p-\varphi)x - qxx)Qxdx] : zz.$$

Wenn man dies nach dem 343 §. mit dx dividirt, und alsdenn $= 0$ setzt: so erhält man die Gleichung

$$xx + \frac{2q(Mkk+Paa)}{a(p-\varphi)Q}x = \frac{Mkk+Paa}{Q}$$

und ihre Wurzeln sind $x = -\frac{(Mkk+Paa)q}{a(p-\varphi)Q} \pm$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{Mkk+Paa}{Q}+\frac{qq(Mkk+Paa)^2}{aa(p-\varphi)^2Q^2}\right)},$$

$$\text{oder } x=-\frac{(Mkk+Paa)q}{a(p-\varphi)Q}$$

$$\pm\frac{\sqrt{((Mkk+Paa)^2qq+aa.Q(p-\varphi)^2(Mkk+Paa)}}{a(p-\varphi)Q}$$

Die Gleichung ergiebt, daß es zweene Fälle gebe, bey welchen die Umdrehungsbeschleunigung am grösten wird. Der eine Fall, den die negative Wurzel anzeigt, wäre derjenige, wenn Kraft und Last beyde auf einer Seite der Unterlage angebracht wären, und beyde zusammen die Umdrehung des Rades beschleunigten. Daß es auch auf dieser Seite eine Stelle der Last geben müsse, für welche die Umdrehungsbeschleunigung am grösten werde, ergiebt die Vergleichung mit dem 219 §. Weil nun hier eigentlich der Fall in Betrachtung kommt, da Kraft und Last auf verschiedenen Seiten der Unterlage angebracht sind: so muß man die positive Wurzel nehmen. Ueberdem ist noch dieser Umstand zu bemerken. Das Moment der Trägheit des Rades und der Welle Mkk, hängt zwar gleichfalls von b ab. Indessen hat es doch bey der Differentiation als eine beständige Grösse betrachtet werden können, weil das Moment der Trägheit der Welle, als der eigentlich veränderliche Theil von Mkk, zugleich von der Länge der Welle abhängt. Wenn also dies Moment gleich mit dem Halbmesser der Welle grösser oder kleiner werden würde: so kann man doch allemahl die Länge der Welle so nehmen, daß es dieselbe Grösse behält.

345 §.

345 §.

Die Beschleunigung der Last war $= \frac{ab(p-\varphi)-qbb}{Mkk+Paa+Qbb}$. Man setze nun die gefundenen Werthe statt bb und b, und der Kürze wegen $Mkk+Paa=K$: so erhält man

$$b=-\frac{Kq}{a(p-\varphi)Q}+\sqrt{\left(\frac{K^2q^2}{a^2(p-\varphi)^2Q^2}+\frac{K}{Q}\right)}$$

oder

$$b=\frac{Kq}{a(p-\varphi)Q}+\frac{Kq}{a(p-\varphi)Q}\sqrt{\left(1+\frac{K}{Q}\cdot\frac{a^2(p-\varphi)^2Q^2}{K^2q^2}\right)}$$

d. i. $$b=\frac{Kq}{a(p-\varphi)Q}\left(-1+\sqrt{\left(1+\frac{a^2(p-\varphi)^2Q}{Kq^2}\right)}\right)$$

Dies giebt

$$ab(p-\varphi)=\frac{Kq}{Q}\left(-1+\sqrt{\left(1+\frac{a^2(p-\varphi)^2Q}{Kq^2}\right.}\right.$$

Man setze $-1+\sqrt{\left(1+\frac{a^2(p-\varphi)^2Q}{Kq^2}\right)}=H$:

so wird

$$ab(p-\varphi)-qbb=\frac{Kq}{Q}H-\frac{K^2q^3}{a^2(p-\varphi)^2Q^2}.H^2.$$

Ueberdem wird

$$bb=\frac{K}{Q}-\frac{2K.q.b}{a(p-\varphi)Q}=\frac{K}{Q}-\frac{2K^2q^2.H}{a^2(p-\varphi)^2Q^2};$$

folglich $Mkk+Paa+Qbb=2\left(K-\frac{K^2.q.H}{a^2(p-\varphi)^2Q}\right)$

und $$\frac{ab(p-\varphi)-qbb}{Mkk+Paa+Qbb}=\frac{qH}{2Q}=$$

$\frac{q}{2Q}\left(-1+\sqrt{\left(1+\frac{a^2(p-\varphi)^2Q}{(Mkk+Paa)q^2}\right)}\right)$, welches die gröste Beschleunigung selbst ist, so die am Umfang des Rades angebrachte Kraft der Last mittheilen kann.

Wenn die Last auf einer horizontalen Ebene liegt, und auf derselben horizontal fortgezogen wird: so ist $q=0$, und die Beschleunigung der Last $=\frac{ab(p-\varphi)}{Mkk+Paa+Qbb}$; sie wird am grösten, wenn $b=\sqrt{\frac{Mkk+Paa}{Q}}$ genommen wird; und weil die gröste Beschleunigung sich auch so ausdrücken läst $\frac{q}{2Q}\sqrt{\left(1+\frac{a^2(p-\varphi)^2Q}{Kq^2}\right)}-\frac{q}{2Q}$: so wird der positive Theil $=\sqrt{\left(\frac{qq}{4Q^2}+\frac{aa(p-\varphi)^2}{4Q.K}\right)}$, und man erhält für $q=0$ diese gröste Beschleunigung $=\frac{a(p-\varphi)}{2\sqrt{(Mkk+Paa)Q}}$.

346 §.

Am Umfang der Welle BFG hängt die Masse Q, und ihr Gewicht ist q; überdem ist AC ein Arm einer Winde, oder eines Haspels, woran bey A die Masse P hängt, deren Gewicht p ist. Die Kraft p soll die Last überwiegen, und man sucht den Punct A, wo die Kraft angebracht werden muß, damit die Beschleunigung der Last am grösten werde.

Aufl. Wenn der Welle Halbmesser $= b$, ihre Masse $=$ A ist; so ist ihr Moment der Trägheit $= \frac{1}{2}Abb$ (340 §). Das Moment der Trägheit des Arms AC würde sich nach dem 165 § finden lassen; es kann hier aber, der kürzern Rechnung wegen, AC als ein mathematischer Hebel betrachtet werden, wenn die Masse dieses Arms in Vergleichung mit der Masse der Welle nicht sonderlich groß ist. Wenn nun AC $= a$, und die Friction am Umfange der Welle $=$ F ist: so ist das statische Moment der Kraft $p = ap - b(q + F)$, die Umdrehungsbeschleunigung $= \frac{ap - b(q+F)}{\frac{1}{2}Ab^2 + Pa^2 + Qb^2}$, und die Beschleunigung der Last $= \frac{apb - bb(q+F)}{Pa^2 + (\frac{1}{2}A + Q)b^2}$.

Man setze a als eine veränderliche Grösse an, schreibe x statt a, und suche, wie im 344 §, das Differential dieses Ausdrucks. Dies wird $= [(Px^2 + (\frac{1}{2}A + Q)b^2)pbdx - 2(pbx - bb(q+F))Pxdx] : (Px^2 + (\frac{1}{2}A + Q)b^2)^2$. Läst man nun dx weg, und setzt diesen Ausdruck $= 0$; so erhält man die Gleichung

$$pbPx^2 + p(\tfrac{1}{2}A + Q)b^3 = 2pbPx^2 - 2bb(q+F)Px,$$

oder $$pbPx^2 - 2bb(q+F)Px = p(\tfrac{1}{2}A + Q)b^3.$$

Daraus folgt $x^2 - \frac{2b(q+F)}{p}x = \frac{\frac{1}{2}(A+Q)bb}{P}$,

und $$x = \frac{b(q+F)}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{(\frac{1}{2}A + Q)bb}{P} + \frac{bb(q+F)^2}{pp}\right)},$$

da dann wie im 344 § nur die positive Wurzel gebraucht wird.

Wenn

Wenn man in den Ausdruck für die Beschleunigung $= \frac{pbx - bb(q+F)}{Px^2+(\frac{1}{2}A+Q)bb}$ die gefundene Wurzel setzt, so erhält man die gröste Beschleunigung selbst. Der Kürze wegen sey $\sqrt{\left(1+\frac{pp(\frac{1}{2}A+Q)}{P(q+F)^2}\right)}=R$: so wird $x=\frac{b(q+F)}{p}(R+1)$, und $pbx-bb(q+F)=bb(q+F)R$. Ferner ist $Pxx=\frac{Pb^2(q+F)^2R^2}{p^2}+\frac{2Pb^2(q+F)^2}{p^2}R+\frac{Pb^2(q+F)^2}{p^2}$, und die Gleichung $1+\frac{p^2(\frac{1}{2}A+Q)}{P(q+F)^2}=R^2$, giebt $(\frac{1}{2}A+Q)bb=\frac{bb(R^2-1)P(q+F)^2}{pp}$; also

$$Pxx+(\tfrac{1}{2}A+Q)bb=\frac{2Pb^2(q+F)^2}{p^2}R^2+\frac{2Pb^2(q+F)^2}{p^2}R.$$

Daher wird die gröste Beschleunigung $=\frac{p}{2P(R+1)\frac{(q+F)}{p}}$. Man multiplicire Zehler und Nenner mit $(R-1)\frac{q+F}{p}$; so erhält man

$$\frac{(R-1)(q+F)}{2P(R^2-1)\frac{(q+F)^2}{p}}=\frac{(R-1)(q+F)}{A+2Q}=$$

$$= \frac{\sqrt{((q+F)^2 + pp(\frac{1}{2}A+Q):P)} - q - F}{A+2Q}$$

347 §.

Es sind die Halbmesser der Räder und Wellen eines Räderwerks gegeben; am Umfang des ersten Rades *AGH* hängt die Masse *P*, und ihr Gewicht ist *p*; am Umfang der Welle des letzten Rades *DIL* die Last Q, und ihr Gewicht ist *q*; die Kraft *p* überwiegt die Last: man sucht die Beschleunigung der Last Q.

202 Fig. Aufl. Man setze die Halbmesser der Räder AO $= a$, BC $= c$, DE $= e$; und die Halbmesser der Wellen OB $= b$, CD $= d$, EF $= f$. Des letzten Rades DIL mit seiner Welle Moment der Trägheit sey M*mm*, das Moment des mittelsten Rades $=$ N*nn*, des ersten Rades $=$ K*kk*: so daß M, N, K die Massen der Räder sind. Nun ist das statische Moment, womit die Kraft *p* das letzte Rad DIL zu zu drehen strebt, $= \frac{a.c.e}{b.d}p$, oder $= \frac{a.c.e}{b.d}(p-\varphi)$, wenn φ der Friction die Wage hält: und wenn die beyden ersten Räder mathematische Scheiben ohne Trägheit wären; so würde das letzte Rad eben so beschleunigt werden, als wenn in der Entfernung $m =$ EM von der Axe die Masse M, in der Entfernung *f* die Masse Q, in der Entfernung $\frac{a.c.e}{b.d}$ aber die Masse P in einem Puncte beysammen wäre. Folglich wäre die Umdrehungsbeschleunigung

$=$

$$= \frac{\frac{a.c.e}{b.d}(p-\varphi)-af}{\frac{a^2c^2e^2}{b^2d^2}P+Mm^2+Qf^2}.$$

Nun hat aber das mittelste Rad das Moment der Trägheit Nn^2, und der Masse N in der Entfernung $n = CN$ von der Axe Beschleunigung wird $= \frac{e}{d}.G$, wenn G des letzten Rades Beschleunigung ist. Damit nun die Masse N am Rade DIL angebracht, eben so beschleuniget werde, muß sie in der Entfernung $\frac{e}{d}n = EN$ von der Axe angebracht werden. Weil ferner Kkk das Moment des dritten Rades AGH ist, so würde der Masse K, in der Entfernung $K = OK$ von der Axe Beschleunigung $= G$ seyn. Sie wird aber $= \frac{c.e}{b.d}G$; daher muß sie am letzten Rade in der Entfernung $\frac{c.e}{b.d}k = EK$ angebracht seyn, wenn sie eben so beschleuniget werden soll. Demnach wird die Umdrehungsbeschleunigung des letzten Rades $=$

$$\frac{\frac{ace}{bd}(p-\varphi)-fq}{\frac{a^2.c^2.e^2}{b^2.d^2}P+\frac{c^2.e^2}{b^2.d^2}Kk^2+\frac{e^2}{d^2}Nn^2+Mm^2+Qf^2}$$

$$= \frac{abcde(p-\varphi)-b^2.d^2.f.q}{Pa^2.c^2.e^2+c^2.e^2.Kk^2+b^2.e^2.Nn^2+b^2.d^2.Mm^2+b^2d^2.Qf^2}$$

und dieser Ausdruck mit f multiplicirt, giebt die wahre Beschleunigung der Last.

348 §.

Jedes der Momente der Massen Mm^2, Nn^2, Kk^2, ist aus dem Moment eines Rades und der zugehörigen Welle zusammengesetzt. Wenn A und B die Massen des ersten Rades und der Welle bedeuten; so ist $Mkk = \frac{1}{2}Aaa + \frac{1}{2}Bbb$ (340 §). Der Kürze wegen kann man $Mkk = Aa^2 + Bb^2$ setzen, und durch A und B die Hälfte der Massen verstehen. Man kann demnach aus einem ähnlichen Grunde $Nn^2 = C.c^2 + D.d^2$, und $M.m^2 = E.e^2 + F.f^2$ setzen. Und wenn man diese Ausdrücke in die gefundene Formul setzt; so wird die Beschleunigung der Last =

$$\frac{abcdef(p-\varphi) - b^2d^2f^2.q}{a^2c^2e^2(A+P)+b^2c^2e^2(B+C)+b^2d^2e^2(D+E)+b^2d^2f^2(F+Q)}$$

Man setze nun $\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{d} = l$, $\frac{e}{f} = m$, da die Buchstaben k und m in der vorigen Bedeutung nicht mehr gebraucht werden; so wird eben die Beschleunigung der Last

$$= \frac{k.l.m(p-\varphi) - q}{k^2.l^2.m^2(A+P)+l^2.m^2.(B+C)+m^2(D+E)+F+Q}$$

Dieser Ausdruck wird nicht allein $= o$, wenn $klm(p-\varphi) = q$ ist; sondern auch, wenn einer der Halbmesser b, d, f, verschwindet. Daher wird sich eine solche Verbindung der Räder im Räderwerk angeben lassen, wobey die Last die gröste Beschleunigung bekommt.

349 §.

Diejenigen Verhältnisse der Halbmesser der Räder zu den Halbmessern der Wellen in einem Räderwerk zu finden, wobey die Beschleunigung der Last am grösten wird.

Aufl. Es sey $k.l.m = x$; $l.m = y$, $m = z$; $p - \varphi = r$, $A + P = K$; $B + C = L$, $D + E = M$, $F + Q = N$: so ist die Beschleunigung der Last $= \frac{rx - q}{Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 + N}$. Dieser Ausdruck wird desto grösser, je kleiner y und z genommen werden. Daher darf man nur suchen, wie groß x genommen werden müsse, damit dieser Ausdruck am grösten werde. Man siehet dabey nicht allein y und z, sondern auch A, B, C, D, E, F; folglich K, L, M, N, wegen der im 344 § schon angeführten Ursache, als beständige Grössen an. Nach der Regel des 343 § findet man

$$(Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 + N)r - (rx - q).2Kx = 0$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{2q}{r}x = \frac{Ly^2 + Mz^2 + N}{K},$$

und die positive Wurzel ist

$$x = \frac{q}{r} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{r^2} + \frac{Ly^2 + Mz^2 + N}{K}\right)};$$

oder, wenn man die angenommenen Werthe wieder herstellt $klm = \frac{q}{p-\varphi} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{(p-\varphi)^2} + \frac{(B+C)l^2m^2 + (D+E)m^2 + F + Q}{A+P}\right)}$.

Setzt man in den gefundenen Werth von x die Irrational-

tionalgrösse $= R$; so hat man $x = \frac{q}{r} + R$; also

$rx - q = r.R$, und $\frac{q^2}{r^2} + \frac{Ly^2 + Mz^2 + N}{K} = R^2$;

folglich $Ly^2 + Mz^2 + N = K.R^2 - \frac{Kq^2}{r^2}$. Dies

giebt ferner $Kx^2 = \frac{Kq^2}{r^2} + \frac{2KRq}{r} + K.R^2$.

Und $Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 + N = \frac{2K.R.q}{r} + 2K.R.$

Also ist die gröste Beschleunigung $= \frac{rr}{2K.q + 2Kr.R}$

$$= \frac{rr}{2Kr\sqrt{\left(\frac{q^2}{r^2} + \frac{Ly^2 + Mz^2 + N}{K}\right)} + 2K.q.}$$

Ueberhaupt also wird die Last vermittelst weniger Räder mehr, als vermittelst vieler Räder beschleunigt. Es können nemlich y, z, L, M, N nie verschwinden, wo nicht ein, oder mehr Räder weniger vorhanden sind. Auch bekommen diese Buchstaben nie negative Werthe, wenn dieselbe Anzahl Räder bleibt. Bey eben der Anzahl Räder aber wird die Last desto mehr beschleunigt, je kleiner bey allen folgenden Rädern, das erste ausgenommen, das Verhältniß zwischen dem Halbmesser des Rades und der Welle ist.

Diese bisher ausgeführte allgemeine Theorie der Ueberwucht bey Rollen und Rädern ist aus Herrn Eulers Abhandlung: De machinarum vsu maxime lucroso. Comment. Petrop. T. X. genommen. Herr

Käst-

Kästner hat eben die Theorie in den Anfangsgründen der höhern Mechanik 250 u. f. S. ausgeführt. Es soll nunmehro noch die Anwendung auf einige besondre Fälle gemacht werden, dergleichen man in Hr. Schobers Theorie der Ueberwucht. Leipzig 1751. antrift.

350 §.

An einer Rolle hängen zu beyden Seiten die Massen P und Q, ihre Gewichte sind p und q; aber p überwiegt q, so daß die Masse P in der Zeit t die Geschwindigkeit c erlangt, und den Weg x zurücklegt: man sucht x und c durch t.

Aufl. In der allgemeinen Formul des 341 § für die Beschleunigung der Masse P setze man $a=b$, und $P=p$, $Q=q$: so hat man $dc=\frac{2gaa(P-\Phi-Q)\,dt}{Mkk+aa(P+Q)}$. Man setzt hier das Gewicht des Fadens bey Seite, oder rechnet es mit zu den Gewichten; die denn beständige Grössen bleiben, wenn die Einrichtung so gemacht wird, daß auf beyden Seiten der Rolle während der Bewegung gleichviel vom Faden herabhängt. Die Integration giebt $c=\frac{2gaa(P-\Phi-Q)\,t}{Mkk+aa(P+Q)}$. Weil ferner $\frac{dx}{dt}=c$, so wird $dx=\frac{2gaa(P-\Phi-Q)\,t\,dt}{Mkk+aa(P+Q)}$, und $x=\frac{aag(P-\Phi-Q)\,tt}{Mkk+aa(P+Q)}$. Beyde Integrationen

grationen setzen voraus, daß für $t = o$ auch $c = o$ und $x = o$ sey.

Wenn die Gewichte nicht sehr groß sind, also eine schwache und leichte Rolle genommen werden kan, so läst sich dieselbe ohne einen sonderlichen Fehler als eine mathematische Scheibe ohne Schwere betrachten, da dann Mkk $= o$ gesetzt werden kann. In diesem Fall wäre $dc = \frac{2g(P-\varphi-Q)\,dt}{P+Q}$;

$$c = \frac{2g(P-\varphi-Q)\,t}{P+Q}; \quad x = \frac{g(P-\varphi-Q)\,tt}{P+Q}.$$

Man vergleiche hiemit den 56 §. Es ist nemlich nun so viel, als wenn eine Kraft $P-\varphi-Q$ die Masse $P+Q$ beschleunigte.

Schreibt man s statt x, und setzt $gtt = S$; $P = m+n$; $Q = m$, $\varphi = o$: so hat man Hrn. Schobers Formul $s = \frac{nS}{2m+n}$. a. a. O. 17te Seite.

Man wird Hrn. Schobers Vortrag besser verstehen, und mit der bisherigen Theorie vergleichen können, wenn man bemerkt, daß derselbe allenthalben da das Wort: Schwere gebraucht, wo sonst gewöhnlich das Wort: Gewicht gebraucht wird. Seine 2te, 3te und 5te Aufgabe sind leichte Folgen aus der Gleichung $s = \frac{nS}{2m+n} = \frac{ngtt}{2m+n}$;

oder $s = \frac{(P-Q)S}{P+Q}$, welche zugleich die Auflösung der 4ten Schoberschen Aufgabe enthält. Es wird nemlich $2ms = n(S-s)$; also $n = \frac{2ms}{S-s}$

(2te

(2te Aufgabe) $S = \frac{(2m+n)s}{n}$ (3te Aufgabe).

Man hat hier unmittelbar aus der Gleichung $t = \sqrt{\frac{(2m+n)s}{ng}}$. Aber aus $s = \frac{(P-Q)S}{P+Q}$, folgt $Ps+Qs = P.S-Q.S$; also $P(S-s) = Q(S+s)$, und $Q = \frac{(S-s)P}{S+s}$, welches Herrn Schobers Auflösung giebt, wenn man m statt P, und x statt Q schreibt. Exempel, die man zur Uebung nachrechnen kann, findet man beym Schober.

351 §.

Ein Gewicht P, das am Umfang eines Rades hängt, überwiegt die an der Welle herabhangende Last Q: man sucht für die gegebene Zeit t die Geschwindigkeit c der Last, und den von ihr zurückgelegten Weg x.

Aufl. Die Gleichung für die Geschwindigkeit der Last war im 341 § $c = \frac{ab(p-\varphi)-bbq}{Mkk+Paa+Qbb}\,2gt$, und man muß hier $p = P$, $q = Q$ setzen. Wenn man nun der Kürze wegen $\frac{ab(P-\varphi)-bbQ}{Mkk+Paa+Qbb} = f$ so hat man $c = \frac{dx}{dt} = 2gft$; also $x = gftt$.

Wenn die Masse des Rades so geringe ist, daß man $Mkk = o$ setzen kann: so wird $x = \frac{ab(P-\varphi)-bbQ}{Paa+Qbb}\,gtt$. Man schreibe,

wie vorhin, s statt x, S statt gtt, und setze mit Hn. Schober a. a. O. 17. §, $\varphi = 0$, $a = 1$, $b = p$; $P = mp + n$, $Q = m$: so wird $s = \frac{pn.S}{np + n + mp^2}$ (a. a. O. 25. §).

Es folgen hieraus wiederum verschiedene specielle Aufgaben, die den vorigen ähnlich sind. Man kan der Kürze wegen P, statt $P - \varphi$ schreiben, und in jedem besondern Fall wegen der Friction φ abrechnen. Drückt man nun die gefundene Gleichung so aus $s = \frac{abP - bbQ}{Paa + Qbb} S$, so wird $Paas + Qbbs = abP.S - bbQ.S$, und dies giebt $bb(S+s)Q = a(bS - as)P$; also $P = \frac{bb(S+s)Q}{a(bS - as)}$, und $aP - bQ = \frac{(abb(S+s) - ab(bS - aS))Q}{a(bS - as)} = \frac{(abbs + aabs)Q}{a(bS - as)} = \frac{abs(b+a)Q}{a(bS - as)}$. Nach der Schoberschen Bezeichnung wird dieser Ausdruck $= \frac{(sp + spp)m}{Sp - s}$, und er dient die Ueberwucht, also auch P zu finden, wenn Q, a, b, s und t gegeben sind, a. a. O. 21 §.

Ferner hat man

$$S = \frac{(Paa + Qbb)s}{abP - bbQ} = \frac{(mp + n + mp^2)s}{np},$$

(a. a. O. 23. §) und $t = \sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \frac{Paa + Qbb}{abP - bbQ} s$.

Ueber-

Ueberdem ist

$$Q = \frac{a(bS-as)P}{bb(S+s)} = \frac{(pS-s)(mp+n)}{pp(S+s)}.$$

Man s. Schobers 27. §, woselbst nun aber m statt $mp+n$ gesetzt ist.

Es sey, wie vorhin, der Weg der Last $= x$, und nunmehro der Weg der Kraft $= s$, so ist $s = \frac{a}{b}x$.

Es war aber $x = \frac{abP-bbQ}{Paa+Qbb}S$, daher wird $s = \frac{(aaP-abQ)S}{Paa+Qbb}$, und wenn man daraus b sucht; so erhält man $s.Qbb + sPaa = aaP.S - aQS.b$;

also $bb + \frac{a.S}{s}b = \frac{aaP(S-s)}{sQ}$; folglich

$$b = -\frac{a.S}{2s} + \sqrt{\left(\frac{aaP(S-s)}{sQ} + \frac{aaS^2}{4s^2}\right)}.$$

Weil nun $x = \frac{b}{a}s$, so erhält man auch $x =$

$$s\sqrt{\left(\frac{P(S-s)}{sQ} + \frac{S^2}{4s^2}\right)} - \tfrac{1}{2}S.$$ Man s. Schober a.a.O. (28. §) wo x, n, m statt b, P, Q gebraucht sind, und $a = 1$ ist.

Wenn man b aus der Gleichung $x = \frac{abP-bbQ}{Paa+Qbb}S$ sucht; so erhält man

$$bb - \frac{aPS}{Q(S+x)}b = -\frac{aaPS}{Q(S+x)},$$ und es wird

$$b = \frac{aPS}{2Q(S+x)} + \sqrt{\left(\frac{aaP^2.S^2}{4Q^2(S+x)^2} - \frac{aaP.x}{Q(S+x)}\right)}$$

da dann der Weg der Kraft $s = \frac{a}{b}x$ ist; oder

$$s = x : \frac{b}{a} = x : \left(\frac{P.S}{2Q(S+x)} + \sqrt{\left(\frac{P^2.S^2}{4Q^2(S+x)^2} - \frac{Px}{Q(S+x)}\right)}\right).$$

Schober a. a. O. 30 §. Beyde für b gefundene Gleichungen dienen, das Verhältniß der Entfernungen zu finden, worin Kraft und Last angebracht werden müssen, wenn die Höhe vorgeschrieben ist, wovon die Kraft in gegebener Zeit fallen, oder worauf die Last in gegebener Zeit steigen soll. Herrn Schobers Vortrag ist ohne Noth ein wenig weitläuftig gerathen. Man kann aus der angestellten Vergleichung abnehmen, wie derselbe zum Vortheil der Deutlichkeit kürzer gefaßt werden könnte.

352 §.

55 Fig. Am Flaschenzuge 55 Fig. hängt die Last Q, und ihr Gewicht ist q; am äussersten Ende des Seils bey z eine Masse P, und ihr Gewicht ist p, welches die Last überwiegt: man sucht die Geschwindigkeit c der Last, und den von ihr zurückgelegten Weg x für jede gegebene Zeit t.

Aufl. Wenn die Rollen nur leicht und von geringer Grösse sind, so daß man sie als mathematische Scheiben ohne Schwere betrachten kann: so wird die Bewegung so erfolgen, als wenn die untere Fla-

sche ein Räderwerk, und der Halbmesser eines jeden Rades noch mahl so groß wäre, als der Halbmesser der zugehörigen Welle. Ist also die Anzahl der untern Rollen $= n$, und der untersten Rolle Halbmesser $= r$; so ist der Kraft p Moment $= 2nr.p - rq$, und die Beschleunigung der Last $= \frac{2nr.p-rq}{4n^2.r^2P+r^2.Q}.r$

$= \frac{2np-q}{4n^2P+Q}$. Dies giebt die Geschwindigkeit

$c = \frac{(2np-q)2gt}{4n^2P+Q}$, und den Weg der Last

$x = \frac{(2np-q)gtt}{4n^2P+Q}$.

Dafern man aber die Masse der Rollen mit in Betrachtung ziehen will, so muß man folgendes erwägen. Wären die Rollen alle gleich groß, so würden sie insgesamt mit gleicher Winkel-Geschwindigkeit herumlaufen. Wenn aber, wie gewöhnlich, die mittlern Rollen kleiner, als die äussern genommen werden: so laufen die mittlern desto schneller, je kleiner sie sind, und die Winkel-Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt, wie die Halbmesser. Wenn demnach a, b, c, u. s. f. die Halbmesser der Rollen sind, wie sie in der Ordnung der Grösse folgen; M, N, K, ihre Massen Mm^2, Nn^2, Kk^2, die Momente der Trägheit: so ergeben eben die Schlüsse, die beym Räderwerk im 347 § gebraucht sind, es sey die Beschleunigung der Last

$$= \frac{(2n.ap-aq)a}{4n^2a^2P+2\frac{a^2}{c^2}Kk^2+2\frac{a^2}{b^2}Nnn+2Mm^2+Qa^2}.$$

Weil nun $k^2 = \frac{1}{2}c^2$, $n^2 = \frac{1}{2}b^2$, $m^2 = \frac{1}{2}a^2$, (340 §), so erhält man für die Beschleunigung der Last den Ausdruck $\frac{2n(p-\Phi)-q}{4n^2P+K+N+M+Q}$. Folglich ist die Geschwindigkeit $= \frac{(2n(p-\Phi)-q)2gt}{4n^2P+K+N+M+Q}$, und der zurückgelegte Weg

$$x = \frac{(2n(p-\Phi)-q)gtt}{4n^2P+K+N+M+Q}.$$

353 §.

Herr Schober hat die bisherige Theorie mit Versuchen verglichen. Er brauchte anfangs eine aus hartem Holz gemachte einfache Rolle, im Durchmesser $2\frac{1}{6}$ Pariser Zolle; sie wog mit der stählernen Axe, die $\frac{1}{12}$ Zoll dick war, 1 Loth $1\frac{1}{2}$ Quentchen. Ueber die Rolle gieng eine aus Zwirn geflochtene Schnur; zu beyden Seiten hiengen Gewichte, jedes 2 Pfund schwer; und die Gewichte waren hohl, damit man kleine Gewichte für die Ueberwucht zulegen konnte. Damit nun während der Bewegung auf beyden Seiten allemahl gleich viel Schnur seyn möchte: so gieng die Schnur, welche 8 Loth schwer war, unten durch das eine Gewicht hindurch, und war wieder an dem Boden des andern angehängt. Daher hiengen auf beyden Seiten 68 Loth, die Schnur mitgerechnet. Vorläufige Versuche hatten gelehrt, daß wegen der Friction 1 Loth zugelegt werden müste, bevor eine Bewegung erfolgte. Hierauf wurden nach einander $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3 Loth zugelegt, und die Tiefe des Falles nebst der verflossenen Zeit bemerkt.

merkt. Die Resultate dieser Versuche theilt Herr Schober in folgender Tafel mit:

Ueberwucht.	Tiefe des Falles 54 Fuß. 1 Versuch	2 Versuch	Theorie	Tiefe des Falles 216 F. 1 Versuch	2 Versuch	Theorie
Loth	Zeit in Secunden.			Zeit in Secunden.		
$\frac{1}{2}$	31	30	31	68	70	63
1	23	22	22	48	49	44
$1\frac{1}{2}$	18	19	18	38	39	36
2	15	16	15	34	34	31
$2\frac{1}{2}$	14	14	14	30	31	28
3	13	12	12	27	28	25

Man nehme z. E. den zweyten Versuch, und berechne die der Höhe 54 Par. Fuß zugehörige Zeit, aus der Gleichung $t = \sqrt{\frac{(P+Q)s}{g(P-\varphi-Q)}}$ (350 §): so ist $P = 70$ Loth; $P-\varphi = 69$ Loth; $Q = 68$ Loth; $s = 54$ Par. F., und $g = 15{,}1$ Par. F. (181 §). Also $t = \sqrt{\frac{138 \cdot 54}{15{,}1}} = 22\frac{1}{5}$ Sec. Setzt man $s = 216$ Fuß: so wird $t = \sqrt{\frac{138 \cdot 216}{15{,}1}} = 44\frac{2}{5}$ Sec. Die letzten Versuche, in der Höhe 216 Fuß, wichen mehr, als die ersten in der Höhe von 54 Fuß von der Beobachtung ab; und die beobachteten Zahlen sind durchgängig grösser, als die berechneten. Dies kann der Widerstand der Luft verursacht haben, der hier nicht sogar unbeträchtlich gewesen ist. Herr Schober meldet nicht, wie groß die Grundflächen seiner cylindrischen Gewichte gewesen sind; sonst würde man nach dem 323 § die Zeit berechnen, und mit der Beobachtung vergleichen können. Die

Schnur,

Schnur, ob sie gleich geflochten war, ist dennoch zuweilen unten zusammen gelaufen, und um dies zu verhindern, ein glatt gehobelter Stab dazwischen gehalten worden. Auch dies hat die Bewegung vielleicht ein wenig verzögern können.

—Vielleicht hat auch die Friction Antheil an dieser Verzögerung gehabt, die wahrscheinlicher Weise bey zunehmender Geschwindigkeit grösser wird, wie unten wird bewiesen werden.

354 §.

Ausser diesen Versuchen mit der einfachen Rolle, wurden noch andre, mit einem Flaschenzuge angestellt, der zwo obere und zwo untere Rollen hatte, und zwar mit zweyen Gewichten, das eine von 2 Pfund, das andre von 7 Pfund $20\frac{3}{4}$ Loth. Die Einrichtung war so gemacht, daß die Schnüre allemahl einander parallel blieben. Und damit auf der Seite des kleinern Gewichtes immer gleich viel Schnur bleiben möchte: so gieng selbige, wie bey den vorigen Versuchen, durch den Boden dieses Gewichtes durch, und hieng frey bis zum Boden nieder: da sie sich denn, wenn das Gewicht niederging, auf einen Haufen zusammenlegte. Daher hingen auf der einen Seite 64 Loth Gewicht und 4 Loth Schnur, zusammen 68 Loth; auf der andern aber die Flasche mit 2 Rollen, am Gewicht $11\frac{1}{4}$ Loth, mit dem Gewicht von 7 Pfund $20\frac{3}{4}$ Loth, zusammen 272 Loth. Wegen der Friction wurden auf Seiten des kleinern Gewichts $2\frac{7}{8}$ Loth; auf Seiten des grössern aber $8\frac{5}{8}$ Loth erfodert. Die Resultate der Versuche waren folgende. Es wurden 272 Loth mit 68 L. + $2\frac{7}{8}$ L. wegen der Friction, bey nachstehender Ueberwucht, 55 Fusse hoch gehoben.

Ueber-

Ueberwucht	1 Versuch	2 Versuch	Nach der Rechnung
Loth	in	Secun	den
$\frac{1}{2}$	47	46	50 +
1	34	34	35 $\frac{1}{2}$
1 $\frac{1}{2}$	29	29	29
2	25	25	25 +
2 $\frac{1}{2}$	23	23	22 $\frac{1}{2}$
3	21	21	20 $\frac{1}{2}$

Man gab auch dem grösten Gewichte nachstehende Ueberwucht, da dann 68 L. durch 272 Loth + $8\frac{5}{8}$ Loth, wegen der Friction auf 220 Fuß gehoben wurden.

Ueberwucht	1 Versuch	2 Versuch	nach der Rechnung
Loth	in	Secun	den
2	48	46	50 —
4	34	34	35 +
6	28	28	29 —
8	25	25	25
10	22	22	22 +
12	20	—	20 +

Will man die berechneten Zahlen prüfen: so läst sich die Gleichung $x = \frac{2n(p-\varphi)-q}{4n^2P+Q} gtt$ (352 §.) brauchen, welche $t = \sqrt{\frac{(4n^2P+Q)x}{(2n(p-\varphi)-q)g}}$ giebt. Nimmt man aus der ersten Tafel den zweyten Versuch; so wird $x = 55$ Par. F. $n = 2$; $P = 71\frac{7}{8}$ L. $Q = 272$ Loth $= q$; $p-\varphi = 68$ Loth, $g =$

15,1

15,1 F. also $t = \sqrt{\frac{1422 \times 55}{4.15,1}} = 35,9$ Secunden.

355 §.

Es ist bey den bisherigen Versuchen allemahl vorausgesetzt worden, daß die Kraft p die Last q überwiege, also die Masse P sinke, und Q steige. Die allgemeinen Formuln lassen sich aber auch auf die Fälle leicht anwenden, wenn die Last q die Kraft p überwiegt. Wird die Friction bey Seite gesetzt, so bestehet der ganze Unterscheid darinnen, daß das Moment der Kraft p, z. E. $ap - bq = -(bq - ap)$ im 341 § negativ wird. Dies giebt für die Beschleunigung und alle übrige davon abhängende Werthe, negative Ausdrücke, welches anzeigt, daß nun Kraft und Last nach Richtungen fortgehen, die den vorigen entgegengesetzt sind. Da man nun dies schon zum voraus weiß: so kann man das Zeichen (—) vor dem Moment der Last weglassen, und schlechthin $(bq - ap)$ für das Moment der Last nehmen. Wird die Friction mit in Betrachtung gezogen: so ist zu bemerken, daß sie allemahl als ein Widerstand anzusehen sey, der die Bewegung hindert. Sollen demnach φ oder F in der Bedeutung des 341. § gebraucht werden: so wird das Moment der Last $bq - ap - a\varphi$, oder auch $bq - ap - bF$, nachdem entweder φ am Umfang des Rades, oder F an der Welle mit der Friction im Gleichgewichte ist.

Diese Betrachtung findet ihre Anwendung, wenn man die im 354 §. in der letzten Tafel berechneten Zahlen prüfen will. Nun hätte man die Gleichung $x = \frac{q - 2n(p+\varphi)}{4n^2 P + Q} gtt$; oder wenn man $\varphi = \frac{1}{4}F$ setzt,

setzt, weil die Kraft ein viermahl grösseres Moment als die Last hat, $x = \frac{q - 2np - \frac{1}{2}nF}{4n^2P + Q} gtt$; also

$$t = \sqrt{\frac{(4n^2P + Q)x}{g(q - 2n(p+\varphi))}} = \sqrt{\frac{(4n^2P+Q)x}{g(q - 2np - \frac{1}{2}nF)}}.$$

Wendet man dies auf den zweyten Versuch an, so wird $P = 68$ Lt. $= p$; $Q = 284\frac{5}{8}$ Lt. $= q$; $n = 2$; $F = 8\frac{5}{8}$ Lt; $x = 55$. Dies giebt

$$t = \sqrt{\frac{(16 \times 68 + 284\frac{5}{8})55}{15,1 \times 4}} = 35,3 \text{ Secunden.}$$

356 §.

An einer Welle ist statt des Rades eine massive Cylindrische Scheibe befestiget, und an der Welle hängt vermittelst einer Schnur eine Masse Q, deren Gewicht q ist, herab: man frägt, wieviele Zeit Q braucht, durch einen gegebenen Raum zu sinken.

Aufl. In dem allgemeinen Ausdruck für die Beschleunigung der Last $= \frac{ab(p-\varphi) - bbQ}{Mkk + Paa + Qbb}$ (341 §) setze man $P = p = 0$, und nehme φ mit dem entgegengesetzten Zeichen (355 §); so wird diese Beschleunigung $= -\frac{bbQ - ab\varphi}{Mkk + Qbb}$, wo man auch das voranstehende Zeichen $(-)$ weglassen kann. Nimmt man $F = \frac{a}{b}\varphi$ statt φ, so wird dieser Ausdruck $= \frac{bb(Q-F)}{Mkk+Qbb}$, und $t = \sqrt{\frac{(Mkk+Qbb)x}{gbb(Q-F)}}$.

Herr Schober bediente sich einer Scheibe von Ellern Holze, ihr Halbmesser war 0,44 Par. Fuß. Der Welle Halbmesser war 0,045 Fuß: das Gewicht der Scheibe 106 Loth. Die Zapfen der Welle waren von harten Stahl, und liefen nur mit der Spitze in stählernen Pfannen, die aufs stärkste gehärtet waren, so, daß die Friction nur sehr geringe seyn konnte. An die Welle wurden verschiedene Gewichte nach einander vermittelst eines dünnen Fadens gehenkt, und die Zeit bemerkt, welche jedes Gewicht brauchte, 40 Fuße tief zu fallen. Die Resultate der Versuche waren folgende:

Gewichte	Beobachtete Zeit	Berechnete Zeit
2	107 Sec	104 Sec
3	78	78
4	65	64
5	56	56
6	50	50
7	45	46
8	42	43
9	39	40
10	37	38

Bey Berechnung der Zeit, hat Hr. Schober $\frac{3}{4}$ Loth für die Friction gerechnet. ($1\frac{3}{4}$ Loth, ist auf der 80 Seite ein Druckfehler.)

Um die Rechnung zu prüfen, nehme man z. E. den achten Versuch, wo $Q = 9$ Lt; also $Q - F = 8,25$ Lt. ist: so wird $b = 0,045$; $bb = 0,002025$, und $gbb(Q-F) = 0,252264375$. Weil die Masse der Welle sehr gering ist: so kann man $Mkk = \frac{1}{2}Maa$ setzen, da dann $M = 106$ Lt. ist, und $\frac{1}{2}Maa$

=

$= 10{,}2608$ wird; $\frac{1}{2}Maa + Qbb = 10{,}279025$; $x = 40$ F.; und $(\frac{1}{2}Maa + Qbb)x = 411{,}161$, und dies giebt $t = 40{,}3$ Sec.

357 §.

Die Abmessungen einer Scheibe und der zugehörigen Welle, nebst ihrem Gewicht sind gegeben: man frägt, wie groß das an der Welle hängende Gewicht seyn muß, wenn die Scheibe in einer gegebenen Zeit eine gewisse Anzahl Umwendungen machen soll.

Aufl. Wenn man den Umfang der Welle kennt, und denselben mit der Anzahl der Umgänge multiplicirt: so hat man die Tiefe, um welche ein an der Welle herabhangendes Gewicht in der gegebenen Zeit sinken muß. Diese sey $= x$; das Gewicht, Q; die Friction F, u. s. f. so giebt die Gleichung des vor. § $Qbb(gt^2 - x) = Mkk.x + Fb^2.gt^2$. Also $Q = \frac{Mk^2.x + Fb^2gt^2}{bb(gt^2 - x)}$, und, wenn man die Friction bey Seite setzt, $Q = \frac{Mk^2.x}{bb(gt^2 - x)} = \frac{M\frac{k^2}{b^2}x.}{gt^2 - x}$

Um diesen Ausdruck mit dem Schoberschen (a. a. O. 42 §) zu vergleichen, darf man nur erwägen, daß bey ihm $b = 1$ sey, in der 13 Anfg. 65 S. (Diese muß im 42 § verstanden werden, statt der 12 Aufg.) Ferner schreibe man s statt x, und S statt gt^2: so hat man $Q = \frac{Mkk.s}{S - s}$. Eine Masse $= \frac{Mk^2}{b^2}$, in der Entfernung b von der Axe angebracht, würde eben die Umdrehungsbeschleunigung, wie die Schei-

be, bekommen. Herr Schober nimmt an, daß ihre Hälfte auf jeder Seite, in der Entfernung b von der Axe, statt der Masse der Scheibe angebracht sey, und setzt $\frac{1}{2}M = m$. Daher wird seine Formul $= \frac{2mkk \cdot s}{S - s}$, da dann bey ihm im 42 §, b das ist, was hier $k = \frac{a}{b}$ heist. Zur Erläuterung dessen, was Hr. Schober in seiner 13. 14. 15 und 16 Aufg. vorträgt, dient die Theorie, welche oben im XI Abschnitt ausgeführt ist.

Die Scheibe sey ein Mühlstein, 1770 Pf. schwer, und 2,85 Par. Fuß im Durchmesser. Der Welle Durchmesser sey 0,75 Fuß. Soll nun der Stein seine Bewegung von der Ruhe anfangen, und mit beschleunigter Bewegung in einer Minute 210 mahl herum laufen: so ist der Welle Umfang $= \frac{3}{1}\frac{5}{1}\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4}$ F. $= 2,35619$, und dies mit 210 multiplicirt, giebt den Weg der Kraft $= 494,7999$; oder fast 495 Par. Fuß. Zieht man die Masse der Welle nicht in Betrachtung, so wird $Mk^2 = \frac{1}{2}Maa$, wenn M das Gewicht, und a den Halbmesser des Steins bedeutet; also ist hier $M = 1770$ Pf. und $Q = \frac{\frac{1}{2}M\frac{a^2}{b^2} \cdot x}{gt^2 - x}$; $\frac{a}{b} = \frac{19}{5}$; $\frac{a^2}{b^2} = \frac{361}{25} = 14,44$; $x = 495$ F. $t = 60$ Sec. $g = 15,1$. Dies giebt

$$Q = \frac{885 \cdot 495 \cdot 14,44}{3600 \cdot 15,1 - 495} \text{ Pf.} = \frac{885 \cdot 11 \cdot 14,44}{1197}$$

$= 117,4$ Pf.

Der XXII. Abschnitt.

Von der Friction bewegter Körper.

358 §.

In dem allgemeinen Ausdruck für die Beschleunigung der Last $= \frac{ab(p-\varphi)-bbQ}{Mkk+Paa+Qbb}$ (341 §) ist φ eine Grösse, die von der Friction abhängt. Dafern also die Friction während der Bewegung beständig einerley bleibt: so ändert sich auch φ nicht. In der That gründet sich die bisherige gesammte Untersuchung über die Ueberwucht bey Maschinen auf diese Voraussetzung, und alle hergeleitete Gleichungen bleiben nur unter der Bedingung richtig, daß die Friction als eine gleichförmig hindernde Kraft betrachtet werden könne. Dies scheint aber der Erfahrung nicht so ganz völlig gemäß zu seyn. Hat eine bewegende Kraft an einer Maschine die Ueberwucht, nicht allein über die Last, sondern auch über die Friction; so folgt, daß die Bewegung der Maschine beständig schneller werden müsse, je länger sie fortdauret, dafern anders die angebrachte Kraft von beständiger Grösse bleibet, und ununterbrochen zu würken fortfährt. So wäre aus dem 341 §. die Geschwindigkeit der Last $c = \frac{(ab(p-\varphi)-bbQ)2gt}{Mkk+Paa+Qbb}$, der Zeit t proportional, wie es der Natur gleichförmig

mig würkender Kräfte (56§) gemäß ist. Allein vermöge der Erfahrung erlangen auch solche Maschinen, die durch Gewichte getrieben werden, nur einen bestimmten Grad der Geschwindigkeit, und die Bewegung geht hiernächst gleichförmig fort, wenn gleich die angebrachte Kraft ununterbrochen zu würken fortfährt. Dies könnten nun freylich andre vielleicht noch unbekannte Hindernisse der Bewegung verursachen: indessen könnte die Ursache davon auch wohl diese seyn, daß die Friction die Bewegung nicht allemahl gleich stark, sondern bey grösserer Geschwindigkeit mehr, als bey geringerer Geschwindigkeit hinderte. So wäre in dem vorigen Exempel die Beschleunigung der Last $= \frac{(ap - bQ - p\varphi)b}{Mkk + Paa + Qbb}$, wo $ap - bQ$ eine positive beständige Grösse ist. Dafern nun φ nach und nach anwächst: so wird diese Beschleunigung desto kleiner, je länger die Bewegung fortdauret, und verschwindet, wenn $p\varphi = ap - bQ$ wird. Deswegen muß von diesem Augenblick an die Bewegung gleichförmig werden. So wird es sich allemahl in solchen Fällen verhalten, wo eine Bewegung, die gleichförmig würkende Kräfte verursachen, durch die Friction gehindert wird. Wenn p eine Kraft ist, welche die Masse M beschleunigt, und f die Friction: so ist die eigentliche Beschleunigung der Bewegung $\frac{dc}{2gdt} = \frac{p - f}{M}$. Diese wird immer kleiner, je grösser f wird, und verschwindet, wenn $f = p$ ist, da dann die Bewegung hiernächst gleichförmig fortgehen muß.

359§.

359 §.

Sollte diese Betrachtung ihre Richtigkeit haben: so würde man die Friction bey jeder Bewegung als eine veränderliche Grösse, die von der Geschwindigkeit abhängt, betrachten müssen. Die im XII Abschnitte Stat. beschriebenen Versuche würden nur dazu dienen, die anfängliche Friction zu finden, diejenige nemlich, womit die Friction den ersten Anfang der Bewegung hindert. Es würde aber noch eine Function der Geschwindigkeit gesucht werden müssen, welche bey fortgehender Bewegung die jedesmahlige Grösse der Friction bestimmte. Diese Function müste alsdenn die anfängliche Friction geben, wenn man $c = o$ setzt. Herr von Segner nennt diese anfängliche Friction die Friction der Ruhe, und unterscheidet sie von der Friction der Bewegung Disp. de adfrictu solidorum in motu constitutorum. Halæ 1758. Die Sache selbst, daß die Friction bey fortgehender Bewegung nicht immer einerley bleibe, haben schon verschiedene Naturlehrer aus der Erfahrung geschlossen. M. s. Musschenbröck Introd. ad Philosophiam naturalem §. DXXIII *Nollet* Leçons de Physique Experimentale 1 Th. 264 S. der Uebers. Allein es hat noch seine Schwürigkeiten, wenn man die Frage beantworten soll: nach welchem Gesetz sich die Friction ändre, und wie sie eigentlich von der Geschwindigkeit abhänge. Musschenbroeck hat a. a. O. ein paar Versuche angeführt, welche darauf abzielen, dies Gesetz vermittelst der Erfahrung auszumachen. Diese Versuche hat Hr. von Segner in der angeführten Abhandlung zum Grunde gesetzt, und eigene ähnliche Versuche angestellt. Sonst ist mir niemand bekannt,

der die Theorie der Friction von dieser Seite betrachtet mit Fleiß untersucht hätte.

Man setzt nemlich gewöhnlich voraus, daß die Friction während der Bewegung beständig einerley bleibe, wie denn auch Herr Euler in der Theoria motus corporum solidorum §. 961. p. 450. dasselbe behauptet, und in dieser Voraussetzung dienen die oben angeführten Versuche, welche die Ueberwucht bey Maschinen betreffen, zugleich die Friction zu finden, wenn die Zeit genau bekannt ist, worin eine gegebene Kraft eine gegebene Last auf eine gegebene Höhe vermittelst einer Maschine hebt, deren Abmessungen gleichfalls alle bekannt sind. Folgende Aufgabe dient zu einer Probe davon.

360 §.

Wenn ein Gewicht P das andre Q vermittelst einer Rolle hebt, die so klein ist, daß man sie ohne merklichen Fehler als eine mathematische Scheibe betrachten kann, und man hat die Zeit beobachtet, worin Q auf eine gegebene Höhe steigt: die Friction zu finden, vorausgesetzt, daß dieselbe beständig einerley bleibe.

Aufl. Behält man dieselben Bedeutungen der Buchstaben, wie im 350 §, bey, so ist $(P+Q)x = g(P-Q)tt - gtt\varphi$. Also $\varphi = \frac{g(P-Q)tt-(P+Q)x}{gtt} = P-Q-\frac{(P+Q)x}{gtt}$.

Es sey, wie im 353 §, $P = 70$ Lt. $Q = 68$ Lt. $x = 54$ Par. F. $g = 15,1$ Par. F. $t = 22$ Sec: so wird $P-Q = 2$ Lt. und $\varphi = 2 - \frac{138.54}{15,1.484}$ Lt. $= 0,9804$ Lt.

Die

Die im 312 § Stat. beschriebenen Versuche würden auf eine ähnliche Art dienen, die Friction zu finden, wenn bey F ein Gewicht herabhienge, welches die Masse AB auf der horizontalen Ebene MN würklich in Bewegung setzte, und man alsdann die Zeit beobachtete, binnen der das Gewicht P um eine genau abgemessene Tiefe sinkt. Wäre dies Gewicht $=P$, die Masse aber, welche es auf der horizontalen Ebene fortzieht, $=Q$, die Friction $=f$; so würde hier eine Masse $=P+Q$ von der Kraft $P-f$ beschleuniget. Wenn also x der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist: so hat man $x=\frac{g(P-f)tt}{P+Q}$ (56 §). Also $(P+Q)x=gPtt-gftt$, und $f=P-\frac{(P+Q)x}{gtt}$. Allein hier würde es seine grosse Schwürigkeit haben, Zeit und Raum genau genug zu beobachten. 65 Fig.

Aehnliche Schlüsse liessen sich auch aus der Bewegung einer schweren Masse auf einer schiefen Ebene ziehen.

361 §.

Eine schwere Masse Q sinkt längst einer schiefen Ebene herab, die gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigt ist; man hat die Zeit der Bewegung und den zurückgelegten Weg genau genug beobachtet: es soll daraus die Friction gesucht werden.

Aufl. Eine Kraft $=Q.\sin\alpha$ treibt die Masse Q längst der Ebene herab, da eben die Masse inzwischen mit einer Gewalt $=Q\cos\alpha$ gegen die Ebene drückt. Weil man nun gewohnt ist, die Friction

durch ihr Verhältniß gegen diesen Druck auszudrücken (311 § St.); so sey die Friction $= \mu Q \cos\alpha$, so daß μ gesucht werden muß. Dies vorausgesetzt, wird die Beschleunigung der Masse $Q = \sin\alpha - \mu\cos\alpha$, und wenn x der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist; so hat man $x = gtt\sin\alpha - \mu gtt\cos\alpha$, und $\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{x}{gtt\cos\alpha} = \tang\alpha - \frac{x\sec\alpha}{gtt}$. Man s. hievon Hrn. Eulers Abhandlung sur le frottement in den Memoires de l'Academie de Prusse A. 1748, imgleichen Hrn. Käſtners Anfangsgr. der höhern Mechanik III Abſch. 81 u. f. §§. Wegen der Schwürigkeit, alle data genau zu messen, verspricht diese Art die Friction zu finden, nicht mehr Schärfe, als das im 315 § St. bereits beschriebene Verfahren. Daher würden Beobachtungen von dieser Art zur Verbesserung der Theorie von der Friction eben nicht viel beytragen; es wäre denn, daß die Erfahrung Hrn. Eulers Muthmassung (a. a. O. n. XII. XIII. pag. 127. 128.) bestätigte, als wenn die Friction der Bewegung merklich, ja wohl gar um die Hälfte geringer wäre, als die anfängliche Friction der Ruhe. Allein dieser Muthmassung stehen andre Beobachtungen entgegen, wie das folgende weiter ergeben wird.

362 §.

Die im 358sten § bereits angeführte Erfahrung, vermöge welcher jede Maschine nur einen bestimmten Grad der Geschwindigkeit erlangt, wenn gleich die Kraft ununterbrochen zu würken fortfährt, läst sich wenigstens am natürlichsten so erklären, wenn man annimmt, daß die Friction stärker werde, wenn die

Geschwin-

Geschwindigkeit zunimmt. Eben dieser Erfolg giebt zugleich ein Hülfsmittel an die Hand, die jeder Geschwindigkeit zugehörige Friction durch Versuche zu finden. Nachdem die Maschine etwa durch ein angehängtes Gewicht in Bewegung gesetzt ist; so muß man warten, bis ihre Bewegung gleichförmig geworden ist. Hierauf beobachtet man die Umlaufszeit eines gewissen Theils der Maschine, und schliest daraus ihre Geschwindigkeit. Weil nun in eben diesem Fall in den obigen Formuln $p - \varphi = 0$ seyn muß; so hat man $\varphi = p$, da dann p das angehängte Gewicht selbst ist. Auf solche Art hat Musschenbroeck vermittelst seines Tribometers

für die Verhältnisse der Geschwindigkeiten

4 6 7 8 10

folgende Verhältnisse der Friction

1 $1\frac{1}{2}$ 2 3 4

gefunden. Instit. Phys. §. 413. Essai de Physique §. 349. Introd. ad Phil. Nat. §. 523. Die Differenzen der Zahlen, welche diese Geschwindigkeiten ausdrücken, verhalten sich ziemlich genau, wie die Logarithmen derjenigen Zahlen, welche die zugehörigen Frictionen ausdrücken. So ist $7 - 4 = 3$; $10 - 4 = 6 = 3 \times 2$. Setzt man nun $l2 = 3$; so wird $l4 = 6$. Weil ferner 3 beynahe $= \sqrt{2 \times 4}$; so wird $l3$ beynahe $= \frac{1}{2}(l2 + l4) = 4\frac{1}{2}$, welche Zahl wiederum beynahe $= 8 - 4$ ist. Wenn also C, k, c, drey verschiedene Geschwindigkeiten; F, φ, f, die zugehörigen Frictionen sind: so kann man annehmen, es sey $l(\varphi : F) : l(f : F) = k - C : c - C$. Wenn nun F die anfängliche Friction der Ruhe ist, wo $C = 0$ wird; so hat man $l(\varphi : F) : l(f : F) = k : c$ und $c =$

=

$\frac{k}{l(\varphi:F)} l(f:F)$. Man kann der Kürze wegen f statt $f:F$, und φ statt $\varphi:F$ schreiben; oder welches einerley ist, man kann $F = 1$ setzen: so hat man $c = \frac{k}{l\varphi} lf$, da dann durch f eigentlich das Verhältniß der zur Geschwindigkeit c gehörigen Friction gegen die Friction der Ruhe zu verstehen ist. Der Coefficient $\frac{k}{l\varphi}$ läst sich durch einen Versuch bestimmen. Es ist willkührlich, welche Logarithmen man bey der Rechnung brauchen will, und man kan, nachdem es am bequemsten ist, die natürlichen oder auch die Briggischen Logarithmen nehmen.

Diese Voraussetzungen lassen sich nun freylich nicht in aller Schärfe beweisen; wenn man aber dasjenige damit vergleicht, was Hr. von Segner a. a. O. im 12 und 13 § zu ihrer Bestätigung vorträgt: so erlangt die Sache dadurch viel Wahrscheinlichkeit, am meisten aber durch folgende im 20 § beschriebene Versuche.

363 §.

Diese wurden mit einer Uhr angestellt, die aus vier Rädern bestand, und nur mit einem Minuten- und Secunden-Zeiger versehen war, nachdem vorher der Perpendikel nebst dem Haken abgenommen war, um den Rädern freyen Lauf zu lassen. An ihrer Welle hieng man verschiedene Gewichte nach einander auf, und bemerkte sowohl die anfängliche Friction, als auch hiernächst die jedem Gewicht zugehörige Geschwindigkeit, nachdem der Umlauf der Räder gleichförmig geworden war. Es liessen sich nemlich vermit-

mittelst einer andern Uhr die Umlaufs-Zeiten des Minutenweisers beobachten.

I. Versuch.

Beobachtete Geschwindigk.	Friction	Logarithmen der Friction	Berechnete Geschwindigk.
0,	7	0,8450	0,
16,6	9	0,9542	16,6
23	10	1,0000	23
35	12	1,0791	35
45	14	1,1461	45
55	16	1,2041	54
77	18	1,2552	62
91	20	1,3010	70
140	24	1,3802	81
200	30	1,4771	100

II. Versuch.

Beobachtete Geschwindigk.	Friction	Logarithmen der Friction	Berechnete Geschwindigk.
77	20	1,3010	77
111	21	1,3222	91
140	22	1,3424	106
144	25	1,3979	133
181	29	1,4623	168
204	33	1,5185	200
232	37	1,5682	228
263	41	1,6127	254
277	45	1,6532	277
294	49	1,6901	297
312	53	1,7242	313
322	57	1,7558	335
344	65	1,8129	367

Im

Im ersten Versuch kann man $F = 7$ setzen, und $C = 0$, $\varphi = 9$, $k = 16{,}6$; so wird $l(\varphi:F) = 0{,}1092$ und $\frac{k}{l(\varphi:F)} = 152$. Setzt man also $f = 10$, so wird $l(f:F) = 0{,}1550$, und die zugehörige Geschwindigkeit $c = \frac{k}{l(\varphi:F)} l(f:F) = 23$. Eben so sind in dem ersten Versuch die übrigen Geschwindigkeiten berechnet, und das angenommene Gesetz trift bey den ersten vier Geschwindigkeiten sehr wohl zu: die letzten vier beobachteten Geschwindigkeiten weichen aber auf einmahl sehr von den berechneten ab. Es kann seyn, daß anfangs einige Stäubchen zwischen den Rädern befindlich gewesen, welche die Friction verstärkt haben, die bey grösserer Geschwindigkeit weggekommen, so daß daher die Friction geringer geworden.

Im zweyten Versuch setze man $C = 77$, $k = 277$, also $k - C = 200$, $F = 20$, $\varphi = 45$, $l(\varphi:F) = 0{,}3522$; also $\frac{k-C}{l(\varphi:F)} = 568$. Setzt man nun jede andre Geschwindigkeit $= c$, und die zugehörige Friction f, so wird $c - C = 568\, l(f:F)$, und $c = 568\, l(f:F) + C$; woraus sich die Zahlen der letzten Columne ergeben, die, so weit es hier erwartet werden kann, ziemlich mit den beobachteten Geschwindigkeiten übereinkommen.

364 §.

Einer schweren Masse M, die auf einer horizontalen Ebene liegt, wird die Geschwindigkeit h nach horizontaler Richtung mitgetheilt,

theilt, ihre Bewegung wird durch die Friction f verzögert, und sie legt in der Zeit t den Weg s zurück: man sucht eine Gleichung zwischen s und f.

Aufl.. Wenn die anfängliche Friction $=$ F, für die Geschwindigkeit c aber die Friction $= f$ ist; so ist $\frac{f}{M}$ die Verzögerung der Masse M, und man hat nach dem 112 §. $cdc = -\frac{2gfds}{M}$. Da nun $c = \frac{k}{l\varphi} lf$, wenn $f = 1$ ist, (362 §) so sey der Kürze wegen $\frac{k}{l\varphi} = m$, so wird $c = mlf$ und $dc = \frac{mdf}{f}$ (316 §). Dies giebt $mm \cdot \frac{dflf}{ff} = -\frac{2g}{M} ds$, vorausgesetzt, daß hier die natürlichen Logarithmen verstanden werden. Um das Integral zu finden, setze man $\frac{lf}{f} = z$, so ist $\frac{df - dflf}{ff} = dz$, (314. 362 §.) also $\frac{dflf}{ff} = \frac{df}{ff} - dz$, und $\int \frac{dflf}{ff} = -\frac{1}{f} - z$ (315 §) $= -\frac{lf+1}{f}$. Demnach erhält man $mm \cdot \frac{lf+1}{f} = \frac{2g}{M} s +$ Const. Nun sey φ die Friction für die erste Geschwindigkeit h, so ist $f = \varphi$, wenn $s = 0$ ist, und

es

es wird die Const. $= mm \cdot \frac{l\varphi + 1}{\varphi}$, also $\frac{2g}{M} s = mm \cdot \left(\frac{lf + 1}{f} - \frac{l\varphi + 1}{\varphi} \right)$.

Wenn $c = 0$ ist, so hat man $f = F$, und so lange kann die Bewegung des Körpers nur fortgehen. Daher wird der ganze Weg, den der Körper zurück legen kann $= \frac{M.mm}{2g} \left(\frac{lF + 1}{F} - \frac{l\varphi + 1}{\varphi} \right)$.

Man kann durch f und φ die Quotienten $\frac{f}{F}$ und $\frac{\varphi}{F}$ verstehen, also die Sache so betrachten, als ob $F = 1$ wäre. Wenn überdem dieser Ausdruck nur gebraucht werden soll, die verschiedenen Wege zu vergleichen, die ein und eben derselbe Körper mit verschiedener anfänglichen Geschwindigkeit zurück legt, so kann man auch den beständigen Factor $\frac{M.m^2}{2g}$ weglassen, und $s = 1 - \frac{l\varphi + 1}{\varphi}$ setzen, weil vermöge des angenommenen $lF = 0$ wird. Ist ferner e die basis der natürlichen Logarithmen, so ist $1 - le$, und $s = le - \frac{l\varphi + le}{\varphi} = le - \frac{le.\varphi}{\varphi}$.

Ob nun gleich das l hier eigentlich den natürlichen Logarithmen bedeutet, so kann man doch auch die Briggischen brauchen, wenn das Verhältniß der Räume s nur gesucht wird. In solcher Absicht setze man $e = 10$, und $l10 = 1$, so ist dies eben so viel, als wenn man beyde Logarithmen mit dem Modulo

der

der Briggischen multiplicirt hätte, und man erhält

$$s = 1 - \frac{l\,10.\varphi}{\varphi}.$$

Wenn einem Rade eine gewisse Umdrehungsgeschwindigkeit mitgetheilt ist, so würde dasselbe vermöge seiner Trägheit diese Bewegung ungeändert fortsetzen, dafern die Friction sie nicht verzögerte. Letztere aber ist als ein Widerstand anzusehen, der die Bewegung nach und nach vermindert. Da sich nun allemahl ein Punct angeben läst, worin die ganze Masse des Rades vereiniget eben so würde verzögert werden (160 §), und hier die Wege, die eine solche Masse zurücklegen würde, sich wie die Winkel an der Axe verhalten, um welche sich das Rad drehet; so läst sich die gefundene Formul auch gebrauchen, diese Wege, oder Winkel zu vergleichen. Auch wenn mehr Räder im Räderwerk mit einander verbunden sind, so können die Winkel, um welche sich jedes Rad zu drehen fortfährt, nachdem die Würkung der Kraft, welche die Maschine treibt, plötzlich gehemmet worden, mit einander vermittelst eben der Formul verglichen werden.

365 §.

Auf diese Betrachtungen hat Hr. von Segner a. a. O. im 21sten § folgende Versuche gegründet: Nachdem die Bewegung der vorhin beschriebenen Uhr durch die Würkung eines angehängten Gewichts gleichförmig geworden war; so ward in dem Augenblick, wenn der Minutenzeiger an den Anfang der Abtheilungen kam, das Gewicht plötzlich aufgehalten, und hierauf bemerkt, um wie viel Abtheilungen der Weiser noch fortlief, bis die Maschine völlig

in Ruhe kam. Die Friction der Ruhe war 18,5, und die übrigen Versuche nebst ihrer Vergleichung mit der Theorie enthält folgende Tafel:

Beobachtete Räume.	Friction	Logar. der Friction.	Log. (φ:F)	Berechnete Räume.
0	F=18,5	1,26717	- - - -	8
17	25	1,39794	0,13077	17,3
22	29	1,46239	0,19522	23,4
25	33	1,51851	0,25134	29,7
33	37	1,56820	0,30103	35
33	41	1,61278	0,34561	39,2
44	49	1,69029	0,42302	46,1
49	53	1,72427	0,45710	49,1
49	57	1,75587	0,48870	51,7
57	65	1,81291	0,54574	56

Bey Prüfung der berechneten Zahlen muß man bemerken, daß in der Formul $1 - \frac{l10.\varphi}{\varphi}$ hier $\frac{\varphi}{F}$ statt φ gesetzt werden müsse, weil F = 18,5 ist. Daher hat man eigentlich die Formul $1 - \frac{F.l(10\varphi:F)}{\varphi}$. Setzt man nun $\varphi = 25$, so wird $l(10\varphi:F) = 1,13077$, $F:\varphi = 0,74$, und $\frac{Fl(10\varphi:F)}{\varphi} = 0,837$. Dies von 1 abgezogen, läst 0,163. Wenn man diese und alle übrige eben so gefundene Zahlen mit 100 multiplicirt, so drücken sie noch das Verhältniß der Räume aus, und man erhält für diesen Fall 16,3 statt der in der Segnerischen Tafel angegebenen 17,3, welches vermuthlich ein Druckfehler ist. Die Vergleichung ergiebt, daß

daß die Verhältnisse der berechneten und beobachteten Zahlen hier ziemlich mit einander übereinkommen.

366 §.

Wenn eine schwere Masse, deren Gewicht P ist, auf einer schiefen Ebene liegt, und es ist die Friction der Ruhe = F, der Ruhewinkel = A, so hat man F = P tang A, vorausgesetzt, daß das ganze Gewicht P gegen die Ebene senkrecht drückt (311 §. St.) Nun sey die Ebene um einen Winkel = α gehoben, der grösser als A ist, so wird die Masse zwar anfangs längst der Ebene mit beschleunigter Bewegung herab gehen. Aber diese Bewegung wird zuletzt gleichförmig werden. Weil nun in diesem Fall die Friction der Kraft gleich seyn muß, welche die Masse längst der Ebene forttreibt; so wird dieselbe in diesem Fall = p tang α, wenn p der Druck ist, womit die Masse die schiefe Ebene prest: sie wäre aber = P tang α, wenn das ganze Gewicht P gegen die Ebene senkrecht preste. Setzt man nun die Geschwindigkeit = c, womit die Masse zuletzt gleichförmig fortgehet, und die Friction in der letzten Voraussetzung = f, also f = P tang α; so ist $c = m\,l\,(f : F)$ (364 §) = $m\,l$ (tang α : tang A). Dieser Ausdruck dient die Geschwindigkeiten zu vergleichen, die eine schwere Masse durch den Fall von einer schiefen Ebene bey verschiedenen Erhöhungswinkeln erlangen kann. Wäre die Ebene, die eine ziemliche Länge haben muß, in gleiche Theile getheilt, und könnte man die Zeiten genau genug beobachten, worin die Masse diese gleichen Theile durchliefe, so würde man daraus nicht allein abnehmen können, ob die Bewegung einmahl gleichförmig werde; sondern man würde auch

in diesem letzten Fall die Geschwindigkeiten, welche die Masse bey verschiedenen Erhöhungswinkeln erlangt, selbst mit einander vergleichen können. Sie würden sich nemlich umgekehrt wie die Zeiten verhalten, worin die Masse diese gleichen Theile der Ebene, durchliefe. Diese Geschwindigkeiten müsten sich alsdenn wie $l(\text{tang}\alpha : \text{tang A})$ verhalten, im Fall die bisher angenommene Theorie von der Friction richtig ist. Setzt man einen solchen Theil des zurückgelegten Weges $= s$, so müssen sich die Zeiten wie

$$\frac{s}{l(tang\alpha : tang\,A)}$$

verhalten. Es finden sich im 22 §
der angeführten Segnerischen Schrift ebenfalls hieher gehörige Versuche, die der vielen Schwierigkeiten ungeachtet, welche mit dieser Art Versuche verbunden sind, dennoch so genau, als man hier nur immer erwarten kann, mit der Theorie überein kommen.

Der XXIII. Abschnitt.

Das Allgemeine der Theorie von Maschinen-Wesen.

367 §.

Wenn gleich das Wort Mechanik in der allgemeinen Bedeutung des 1 §. St. fast am häufigsten gebraucht wird; so hat es doch auch oft die besondre Bedeutung, daß dadurch vornemlich die

Lehre vom Maschinen-Wesen verstanden wird. In einem Buch, daß den Titel der Mechanik führet, werden manche Leser eine Beschreibung der bekanntesten und gebräuchlichsten Maschinen erwarten, nebst solchen Vorschriften, wie man zu allerhand Absichten neue Maschinen anordnen könne: und in der That ist auch die Lehre von den Maschinen eine der wichtigsten Anwendungen der bisher unter dem Namen der Mechanik vorgetragenen Wissenschaft. So wichtig aber diese Sache an sich selbst ist; von einem so weitläuftigen Umfange sind die hieher gehörigen Kenntnisse. Das folgende wird dazu dienen, einigermassen davon einen Begrif zu geben, worauf es überhaupt beym Maschinenwesen ankomme.

368 §.

Ausser der Beschaffenheit der Theile, woraus eine Maschine zusammengesetzt ist, und ihrer ganzen Einrichtung, kommt es bey derselben auf den Effect an, den sie leisten soll, und hiernechst, auf die an derselben angebrachte Kraft, welche vermittelst der Maschine den verlangten Effect zu Stande bringen soll. Was die Theile betrift, woraus man eine Maschine zusammensetzt, so kennet man den Hebel, die Rolle, das Rad an der Axe, den Keil und die Schraube schon aus der Statik. Diese eben genannte Hebezeuge führen auch den Nahmen einfacher Maschinen. Wenn einige dieser einfachen Maschinen so in Verbindung gebracht werden, daß eine der andern die Bewegung mittheilen, und keine derselben in Bewegung kommen kann, ohne die übrigen mit in Bewegung zu setzen, so heist diese Einrichtung eine zusammengesetzte Maschine. Was nun ferner

den Effect der Maschine betrift, so will man entweder nur einen sehr starken Druck zuwege bringen, wie denn dies bey allen Arten von Pressen die Absicht ist; oder man will körperliche Massen mit Vortheil und nach gewissen Gesetzen bewegen, da dann die Maschine mit in Bewegung gebracht und so lange es die jedesmahlige Absicht erfordert, erhalten werden muß. Der Kräfte, wodurch Maschinen in Bewegung gebracht und erhalten werden können, giebt es mancherley Arten. Ausser den an einer Maschine aufgehängten Gewichten, oder gehörig angebrachten elastischen Federn, können Menschen und Thiere eine Maschine durch ziehen, stossen und treten bewegen. Eben das kan man durch den Stoß eines fliessenden Wassers, des Windes, durch die Gewalt des Feuers u. s. f. zuwege bringen.

369 §.

Ueberhaupt aber lassen sich alle diese Kräfte in zwo Klassen bringen. Einige derselben werden auf die Maschine beständig mit gleicher Stärke wirken, sie mögen die Maschine allererst in Bewegung setzen, oder selbige in der schon mitgetheilten Bewegung erhalten, die Maschine mag sich schnell oder langsam bewegen. Andre aber werden nach Art veränderlicher Kräfte wirken, so daß die von ihnen herrührende Beschleunigung der Maschine desto geringer wird, je mehr die Geschwindigkeit der Maschine zunimmt, und zuletzt gar aufhört, so daß endlich die Bewegung der Maschine gleichförmig wird. Zur ersten Art gehören die Gewichte. Zur letzten Klasse aber die Kräfte der Menschen und Thiere, imgleichen diejenigen, welche vom Stoß eines fliessenden Wassers

und

und des Windes ihren Ursprung haben. Man siehet leicht, daß das Wasser die Umdrehung eines Mühlrades nicht weiter beschleunigen könnte, wenn die Schaufeln desselben schon eben so geschwinde herumgiengen, als das Wasser im Mahlgerinne fortläuft.

370 §.

Jede körperliche Masse wiederstehet der Bewegung wenigstens vermöge ihrer Trägheit, und wenn vermittelst der Maschine ein Gewicht auf eine gewisse Höhe gehoben werden soll, so strebt das Gewicht zugleich der Maschine eine Bewegung mitzutheilen, die derjenigen entgegengesetzt seyn würde, so ihr die angebrachte Kraft mittheilen muß. Demnach hat die an der Maschine angebrachte Kraft allemahl einen gewissen Widerstand zu überwinden, und entweder eine schwere, oder träge Masse in Bewegung zu setzen, und zu erhalten. Das letzte würde z. E. statt haben, wenn die Maschine eine Last auf einem horizontalen Boden fortziehen sollte. Eben der Fall hat bey einer gemeinen Kornmühle statt, wo die Kraft den Mühlstein herum treiben muß. In allen Fällen kommt nicht allein die Friction, sondern auch die Trägheit der Maschine selbst in Betrachtung. Uebrigens bestehet nun der eigentliche Effect der Maschine darin, daß sie eine gewisse körperliche Masse, die hier allemahl als ein Widerstand betrachtet wird, in gewisser Zeit durch einen gewissen Raum beweget: und man beurtheilet die Güte der Maschine aus der Grösse dieses Effects. Um aber die Grösse dieses Effects gehörig zu beurtheilen, und verschiedene Maschinen, die zu einerley Absicht die-

nen sollen, desto richtiger mit einander zu vergleichen, dienen folgende Betrachtungen.

371 §.

Alle Maschinen fangen ihre Wirkung zuerst mit beschleunigter Bewegung an. Die angebrachte Kraft kann den Theilen der Maschine, und vermittelst derselben der widerstehenden und durch Hülfe der Maschine zu bewegenden Masse, nur nach und nach einen beträchtlichen Grad der Geschwindigkeit mittheilen. Diese Beschleunigung dauret aber bey den meisten besonders etwas grossen Maschinen nur sehr kurze Zeit, und die gesammte Bewegung wird sehr bald gleichförmig. Man darf nur ein Mühlrad, das vorher still gestanden hat, betrachten, wenn der Müller das Schutzbrett aufziehet, um sich hievon durch die Erfahrung zu überzeugen. Nachdem nun alles in den Zustand der gleichförmigen Bewegung gekommen ist, wird die Maschine der widerstehenden Masse eine gewisse Geschwindigkeit mitgetheilt haben, womit sie hiernächst beständig fortgehet, so lange die Maschine in eben dem Zustand der Würksamkeit bleibt. Das Product der widerstehenden Masse in die ihr nunmehro von der Maschine mitgetheilte Geschwindigkeit, d. i. die Grösse der Bewegung (57 §), welche die Maschine der widerstehenden Masse mitgetheilt hat, ist der eigentliche Effect der Maschine. Wenn man also das Wort Geschwindigkeit in dem bisher beständig gebrauchten Verstande nimt, so wie es im 4 § erklärt ist, so kann man auch sagen, die Grösse des Effects einer Maschine sey das Product der widerstehenden Masse in den Weg, welchen sie in einer Secunde zurück legt, nachdem der Gang der Maschine gleichförmig geworden.

372 §.

372 §.

Wenn die Kraft anfangs die Maschine in Bewegung setzen soll, so muß das statische Moment der Kraft das Moment des Widerstandes übertreffen. Wären beyde Momente gleich, so könnte keine Bewegung erfolgen. Weil aber die Bewegung der Maschine nach und nach gleichförmig und die Beschleunigung immer geringer wird, so muß die Differenz beyder Momente abnehmen. Sobald endlich der Gang der Maschine gleichförmig wird, müssen beyde Momente gleich werden, weil die Schnelligkeit der Maschine nothwendig so lange zunehmen muß, als eine Ueberwucht da ist. Das Moment der Kraft wird also abnehmen, oder das Moment des Widerstandes wachsen, oder auch beydes zugleich geschehen müssen, bis endlich beyde Momente gleich werden. Wenn aber beyde Momente gleich sind, so verhalten sich Kraft und Widerstand umgekehrt wie die Wege, die sie bey erfolgter Bewegung zugleich durchlaufen. Die Richtigkeit dieses Satzes ist in der Statik für alle einfache Maschinen besonders bewiesen. Er gilt vermöge des 130 §. St. auch für das Räderwerk, es mag aus so viel Rädern, wie man will, bestehen. Eine kleine Ueberlegung ergiebt leicht, daß der Satz allgemein wahr sey, wenn gleich mit dem Räderwerk noch andre einfache Maschinen verbunden wären. Sind also P und R Kraft und Widerstand, s und x die Wege, so sie in einer Secunde zurück legen, nachdem die Maschine in gleichförmigen Gang gekommen ist; so hat man $P.s = R.x$. Demnach werden bey jeder Maschine die Bewegungen der Kraft und des Widerstandes gleich groß, so bald ihr Gang gleichförmig geworden ist.

373 §.

373 §.

So wie aber nur unter der zuletzt angehängten Bedingung die Gleichheit dieser Producte statt hat; so läst sich auch der Effect der Maschine nicht ehe aus dem Product des Widerstandes in seinen nach gewisser Zeit zurück gelegten Weg beurtheilen, bevor alle Beschleunigung der Bewegung aufgehört hat. Daher leidet Herrn Schobers Vorschrift, (Theorie der Ueberwucht 55 S.) wie der Effect einer Maschine beurtheilet werden müsse, einige Einschränkung. Er betrachtet eine Maschine, woran Kraft und Widerstand Gewichte sind, und beurtheilet den Effect derselben aus dem Product der Last in den Weg, den sie von der Ruhe an in einer gewissen gegebenen Zeit zurück legt. Wenn an einer andern Maschine eben die Kraft in eben der Zeit eben so tief fällt, das Product der gehobenen Last in ihren zurück gelegten Weg aber grösser oder kleiner ist, so ist nach Hr. Schober ihr Effect in eben dem Verhältniß grösser oder kleiner. Bey Maschinen von dieser Art, deren Bewegung nach der dabey gewöhnlich obwaltenden Voraussetzung beständig gleichförmig beschleunigt wird, weil man die Friction als eine beständige Grösse ansiehet, ist diese Vergleichung der Effecte von der vorhin festgesetzten nicht sonderlich verschieden. Die Wege nemlich, welche an solchen Maschinen die Lasten in gleichen Zeiten zurück legen, verhalten sich wie die in eben der Zeit ihnen mitgetheilten Geschwindigkeiten. Also ist das Verhältniß der gedachten Producte hier einerley mit dem Verhältniß der den Lasten in gleicher Zeit mitgetheilten Bewegungen. In andern Fällen, wo die angebrachte Kraft die Last nicht gleichförmig beschleuni-

get, fällt dies weg, und man würde sehr irren, wenn man den Effect der Maschine eben so schätzen wollte. Dies werden die folgenden Untersuchungen weiter ergeben.

374 §.

Die Zähne des Rades *DHLN* greifen in das Getriebe *STV*, und die Anzahl der Zähne und Triebstecken ist gegeben: man frägt, wie vielmahl das Getriebe binnen der Zeit umlaufen werde, worin das Rad einmahl umläuft. 207 Fig.

Aufl. Jeder Zahn H schiebt einen Triebstock K vor sich her. Wenn demnach so viel Zähne von H gegen N zu gelaufen sind, als das Getriebe Stecken hat; so ist das Getriebe einmahl umgelaufen. So vielmahl also die Anzahl der Triebstöcke in der Anzahl der Zähne enthalten ist, so viel mahl wird das Getriebe binnen der Zeit umlaufen, worin das Rad einmahl umlauft. Daher wird die Anzahl der Umläufe des Getriebes gefunden, wenn man die Anzahl der Zähne durch die Anzahl der Triebstöcke dividirt. Jene Anzahl sey $= m$, diese $= \mu$; so ist die Zahl der Umläufe $= \frac{m}{\mu}$.

Es sey an der Axe des Getriebes STV ein zweytes Rad mit n Zähnen befindlich, das in ein zweytes Getriebe greift. Ist nun die Anzahl der Stecken am zweyten Getriebe $= \nu$, so wird das zweyte Getriebe $\frac{n}{\nu}$ mahl umlaufen, indem das zweyte Rad einmahl umläuft. Aber auf jeden Umlauf des ersten Rades kommen $\frac{m}{\mu}$ Umläufe des zweyten. Rechnet

man

man also auf jeden Umlauf des zweyten Rades $\frac{n}{\nu}$ Umläufe des zweyten Getriebes, so erhellet, daß auf jeden Umlauf des ersten Rades $\frac{m}{\mu} \cdot \frac{n}{\nu}$ Umläufe des zweyten Getriebes kommen.

Man schliest hieraus leicht die allgemeine Regel: Wenn mehrere Räder in eben so viel Getriebe greifen, und ein jedes Getriebe hat mit dem folgenden Rade eine gemeinschaftliche Welle: so wird die Anzahl der Umläufe des letzten Getriebes gefunden, die einem Umlauf des ersten Rades zugehört, wenn man die Anzahl der Zähne eines jeden Rades durch die Anzahl der Stecken desjenigen Getriebes, worin es eingreift, dividirt, hierauf aber alle Quotienten in einander multiplicirt.

Z. E. Wenn drey Räder nach der Ordnung 72, 50, 32 Zähne, die Getriebe, worin sie greifen, 12, 10, 8 Triebstecken haben, so läuft das dritte Getriebe $\frac{72}{12} \cdot \frac{50}{10} \cdot \frac{32}{8} = 6 \cdot 5 \cdot 4$, d. i. 120mahl binnen der Zeit herum, worin das erste Rad einmahl umläuft.

375 §.

Es ist bestimmt, wie viel mahl das schnellste Rad in einer Maschine umlaufen soll, indem das langsamste einmahl umläuft: man frägt, wie viel Zähne und Triebstecken jedes Rad und Getriebe in solcher Absicht haben müsse.

Aufl. Soll die Maschine nur ein Rad und Getriebe haben, so sey m die Anzahl der Zähne, n die

Zahl

Zahl der Triebstecken. Dafern nun μ die Anzahl der Umläufe des Getriebes gegen einen Umlauf des Rades ist, so muß $\mu = \frac{m}{n}$ seyn. Demnach wird die Zahl der Zähne und Triebstecken für sich nicht, sondern nur ihr Verhältniß gegen einander bestimmt. Nachdem man also n oder m willkührlich annimmt, nachdem wird m oder n aus der Gleichung $m = \mu . n$, oder $n = \frac{m}{\mu}$ bestimmt.

Dafern die Bewegung ordentlich fortgehen soll, so kann man nicht wohl weniger, als 5 Triebstecken nehmen, so daß hiedurch wenigstens eine Grenze bestimmt wird, unter der die Anzahl der Triebstöcke nicht genommen werden darf: man kann aber gar wohl mehrere nehmen.

Die Frage wird noch mehr unbestimmt, wenn die Maschine mehr Räder und Getriebe haben soll. Wenn nemlich L, M, N die Zahlen der Zähne, und l, m, n die Zahlen der Triebstecken nach der Ordnung sind, und μ die Anzahl der Umläufe des letzten Getriebes gegen einen Umlauf des ersten Rades ist, so hat man $\frac{L}{l} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{N}{n} = \mu$. Man zerfälle also die gegebene Zahl μ in so viel Factoren, als man Räder und Getriebe haben will. Jeder Factor drückt die Zahl der Umläufe eines Getriebes gegen einen Umlauf des in dasselbe eingreifenden Rades aus, woraus, wie vorhin, die Anzahl der Zähne und Triebstecken für jedes Rad und dazu gehöriges Getriebe gefunden wird.

376 §.

376 §.

Wenn demnach ein Getriebe in der Zeit eine gegebene Zahl Umläufe machen soll, worin das Rad einmahl umläuft; so läst sich dies auf mancherley Art bewerkstelligen. An sich kann allemahl ein Rad und Getriebe genügen. Soll z. E. das Getriebe 60 mahl in der Zeit umlaufen, worin das Rad einmahl umläuft, so muß das Rad sechszigmahl mehr Zähne haben, als das Getriebe Stecken hat, also wenigstens 300 Zähne. Allein in solchem Fall muß das Rad sehr groß seyn, besonders alsdenn, wenn Zahn und Getriebe einen starken Druck auszustehen haben, und deswegen die Zähne ziemlich dick seyn müssen. Erwählt man in solchen Fällen mehr als ein Rad, so erhält man den Vortheil, daß die Maschine viel kleiner wird. So ist z. E. $60 = 10 \times 6 = \frac{50 \cdot 30}{5 \cdot 5}$, und man kann zwey Räder brauchen, davon das eine 50, das andre 30 Zähne hat, wenn die Getriebe 5 Stecken bekommen; da dann, wenn die übrigen Umstände einerley sind, das gröste von diesen beyden Rädern nur um den 6ten Theil so groß im Durchmesser wird, als das vorige Rad von 300 Zähnen, weil der Umfang nur um den 6ten Theil so groß ist.

377 §.

Wenn die Zahl der Triebstecken in die Zahl der Zähne aufgeht, so wird die Zahl der Umläufe des Getriebes gegen einen Umlauf des Rades eine ganze Zahl. Man siehet aber wohl, daß dies eben nicht nothwendig sey, so würde z. E. das Getriebe $6\frac{3}{4}$ Umläufe gegen einen Umlauf des Rades machen, wenn

das

das Rad 54 Zähne, und das Getriebe 8 Stecken hätte. Ja es hat seine besondere Gründe, warum es vortheilhafter ist, die Einrichtung so zu machen, daß die Zahlen der Zähne und Triebstöcke unter sich Primzahlen sind. Wenn nemlich die Zahl der Triebstecken in der Zahl der Zähne aufgeht, so kommen an jeden Triebstock beym Umlauf allemahl dieselben Zähne des Rades. Hat z. E. das Rad 30 Zähne, und das Getriebe 5 Stecken, so stößt an den ersten Triebstock der 1, 6, 11, 16, 21, 26ste Zahn, und kein andrer, weil der 31ste Zahn wieder der erste ist. Wenn aber das Rad 31 Zähne hätte, so kämen ferner an den ersten Triebstock der 31, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 4, 9, 14, 19, 24, 29, 3, 8, 13, 18, 23, 28, 2, u. s. f. Bey dieser Einrichtung schleifen sich Zähne und Triebstecken besser gegen einander ab, und dadurch wird ihre Gestalt vollkommener. Indessen hat es auf der andern Seite wieder seine Schwierigkeit, ein grosses Rad in eine solche Anzahl gleicher Theile zu theilen, die in keine andre Zahl aufgeht. Deswegen wählt man andre Zahlen, bey denen dennoch viel Zähne an einerley Triebstock kommen. Die Uhrmacher pflegen sich so auszudrücken: ein Werk sey nach aufgehenden Zahlen berechnet, wenn die Zahl der Triebstöcke in der Zahl der Zähne aufgeht, und sie halten gewöhnlich solche Werke für die besten. Man sehe Hartmanns nöthigen Unterricht von Verbesserung der Sack-Uhren, II Cap. 23 u. f. S. Allein *de la Hire* in Traité de Mecanique Prop. 71. behauptet, aus den angeführten Gründen das Gegentheil, und Belidor in der Architectura Hydraulica, I. Buch II Cap. 319 §. tritt ihm bey. Der P. *Dom.* Ja-

cob Alexander hält es in seiner Abhandlung von Uhren für einerley.

378 §.

Die Grösse der Räder und Getriebe richtet sich, wie leicht zu erachten ist, nach der Stärke des Drucks, den sie auszustehen haben, wenn Kraft und Widerstand gehörig angebracht sind. Weil die Triebstecken diesen Druck öfter als die Zähne leiden, so werden sie etwas stärker, als die Zähne gemacht, und die im IX Abschnitt der Statik über die Festigkeit der Körper angestellten Untersuchungen dienen ihre Dicke zu bestimmen, wenn die Materie gewählet ist, woraus sie verfertiget werden sollen. Bey grossen Maschinen werden sie gewöhnlich aus guten harten Holz gemacht, wie bey den Mühlen, bey andern aus Metall, dergleichen die Uhren sind. Gewöhnlich nimmt man die Regel an:

Die Dicke der Triebstecken müsse sich zu ihrer Zwischenweite, wie 8 zu 7 verhalten.

Ist also die Dicke der Triebstecken nach voriger Vorschrift gefunden, auch ihre Anzahl festgesetzt; so bestimmt dies den Umfang des Getriebes, welches hier ein Kreis ist, der durch die Mittelpuncte der Triebstecken gehet. Es sey δ ihre Dicke, so ist der Bogen zwischen ihren Mittelpuncten $= \frac{15}{8}\delta$, und wenn ihre Anzahl $= n$ ist, so ist der Umfang des Getriebes $= \frac{15}{8}n\delta$, folglich der Durchmesser $= \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{\pi} n\delta$, (470 § Geom.). Wenn nun zu einem Umlauf des Rades μ Umläufe des Getriebes gehören sollen, so muß der Umfang des Rades $\frac{15}{8}\mu n\delta$, und sein Durchmesser

messer $= \frac{15}{8} \cdot \frac{\mu}{\pi} nd$ seyn. In Absicht der Zähne hat man die Regel:

Die Dicke des Triebstocks müsse sich zur Dicke des Zahns, wie $8 : 6\frac{1}{2}$ verhalten.

Daher wird die Dicke des Zahns $= \frac{6\frac{1}{2}}{8} \delta$, und die

Zwischenweite $= \frac{8\frac{1}{2}}{8} \delta$. Nach Belidors Bericht Architect. Hydraul. I. Buch II Cap. 318 §, hat man diese Eintheilung durch die Erfahrung für sehr gut befunden. Andre Schriftsteller schreiben etwas andre Eintheilungen vor. Man s. Leupolds Theatr. Mach. Gener. §. 85. L. C. Sturms kurzen Begrif der gesamten Mathesis Part. II. p. 308. Uebrigens giebt man gewöhnlich den Zähnen die Krümmung eines Kreises. Allein Römer (M. s. 128 Stat.) hat gewiesen, daß es die Krümme einer Epicycloide seyn muß, wovon die höhere Geometrie nähern Unterricht geben wird. Ueber die schicklichste Figur der Zähne hat auch Hr. Euler Untersuchungen angestellt im T. V. Nov. Comment. Petrop. pag. 299 sqq.

Es ist aber hier die Rede nur von solchen Zähnen, die in ein Getriebe greifen, und dasselbe drehen sollen. Eine andre Absicht der Zähne erfordert auch eine andre Gestalt, wie z. E. beym Speer-Rade und Steig-Rade an einer Uhr, wo die Gestalt der Zähne ohngefehr mit der Gestalt eines Keils übereinkommt.

379 §.

Die Geschwindigkeit desjenigen Puncts der Maschine, woran die Kraft, so die Maschine treibt, unmittelbar angebracht ist, betrachtet man gewöhnlich als die Geschwindigkeit der Kraft. Wenn diese Kraft ein Gewicht ist, so wird dasselbe wirklich mit eben der Geschwindigkeit sinken. Indessen mag die Kraft von einer Art seyn, von welcher sie wolle, so kann man sich allemahl vorstellen, daß sie bey wirklicher Bewegung der Maschine mit demjenigen Punct, den sie unmittelbar angreift, zugleich fortgehe: und gewöhnlich macht man auch die Sache so vorstellig. Deutlicher würde man reden, wenn man statt des Ausdrucks: Geschwindigkeit der Kraft, den Ausdruck: Geschwindigkeit des angegriffenen Puncts, brauchte. Jener Ausdruck könnte in manchen Fällen einen Misverstand veranlassen. Wenn z. E. das Wasser ein Mühl-Rad treibt, so ist die Geschwindigkeit des Wassers mit der Geschwindigkeit der Schaufeln des Rades nicht einerley. Indem das Wasser gegen die Schaufeln strömt, entsteht daher ein Druck gegen die Schaufeln, der hier eigentlich die am Rade angebrachte Kraft ist. Die mittlere Richtung dieses Drucks geht durch die Mitte der Schaufeln, und die Geschwindigkeit dieses mittlern Puncts der Schaufeln ist hier die Geschwindigkeit der Kraft, so daß man nicht etwa die Geschwindigkeit des Wassers selbst dafür halten muß.

380 §.

Wenn diese Geschwindigkeit der Kraft, oder vielmehr des angegriffenen Puncts für den Beharrungsstand der Maschine bekannt, und die Kraft am Umfang

fang eines Rades angebracht ist; so läst sich leicht finden, wie vielmahl das Rad in einer gegebenen Zeit, z. E. von einer Secunde umlaufe. Es sey diese Geschwindigkeit $= c$, und des Rades Halbmesser $= r$, so ist c ein Bogen, den der angegriffene Punct in einer Secunde zurücklegt, und man hat $c : 2\pi r =$ 1 Secunde : Umlaufszeit des ganzen Rades. Diese sey $= t$, so ist $t = \frac{2\pi r}{c}$. Will man nun wissen, wie vielmahl das Rad in einer andern gegebenen Zeit T herum läuft; so muß man T durch t dividiren, und der Quotient $\frac{T}{t} = \frac{T.c}{2\pi r}$ giebt die Anzahl der Umläufe in der Zeit T. Wenn demnach das Rad μ mahl in einer Secunde umläuft, so hat man $\mu = \frac{c}{2\pi r}$, und man kann c durch die Zahl der Umläufe des Rades in einer Secunde ausdrücken. Es wird nemlich $c = 2\pi\mu r$.

Das Product der Kraft in diese Geschwindigkeit kann Kürze halber das mechanische Moment der Kraft heissen. Es ist dem Effect der Maschine gleich, nemlich dem Product des Widerstandes in seine Geschwindigkeit (372 §). Eben dies letztere Product kann auch das mechanische Moment des Widerstandes heissen. Wenn der Widerstand in der Entfernung q von der Axe eines Trillings angebracht, und seine Geschwindigkeit $= k$ ist, so ist die Umlaufszeit des Widerstandes $= \frac{k}{2\pi.q}$ und wenn derselbe in einer Secunde ν mahl umläuft,

so ist $v = \frac{k}{2\pi q}$, welches, wie vorhin, erhellet, also $k = 2\pi v q$. Es sey P die Kraft, und Q der Widerstand, so hat man für den Beharrungsstand der Maschine die Gleichung $\mu . r . P = \nu . q . Q$. Ehe und bevor aber die Maschine in den Beharrungsstand kommt, wird die Geschwindigkeit des angegriffenen Puncts sich beständig ändern, da dann gemeiniglich P eine Function dieser Geschwindigkeit ist, und zwar hängt P von dieser veränderlichen Geschwindigkeit, die nun unbestimmt v heissen soll, so ab, daß P kleiner wird, wenn v wächst, und wenn v eine gewisse Grenze erreicht hat, $P = 0$ wird.

381 §.

Die an der Maschine angebrachte Kraft P ist als eine Function der Geschwindigkeit v des angegriffenen Puncts, nebst dem Widerstande Q und der Einrichtung der Maschine bekannt: man soll diejenige Geschwindigkeit des angegriffenen Puncts finden, bey welcher die Maschine in gleichförmigen Gang kommt.

Aufl. Die Einrichtung der Maschine sey so, wie sie im vor. § angenommen worden; das Haupt-Rad, woran die Kraft P in der Entfernung r von der Axe angebracht ist, laufe μ mahl, die Welle aber, woran der Widerstand Q in der Entfernung q von der Axe angebracht ist, laufe ν mahl in einer Secunde herum, so hat man für den Beharrungsstand der Maschine $\mu . r . P = \nu . q . Q$. Ist nun P durch eine Function von v ausgedrückt, so kann man v aus der Gleichung $\mu . r . P = \nu . q . Q$ finden, und dies ist diejenige Geschwindigkeit, die man suchte.

Es

Es sey z. E. $P = p\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2$, wo p ein gegebenes Gewicht, und h eine gegebene Linie ist; so hat man $p\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2 = \frac{v.q}{\mu.r} Q$, und daraus folgt $1 - \frac{v}{h} = \sqrt{\frac{v.q}{\mu.r} \cdot \frac{Q}{p}}$, also ferner $v = \left(1 - \sqrt{\frac{v.q}{\mu.r} \cdot \frac{Q}{p}}\right) h$. Sobald der angegriffene Punct der Maschine diese Geschwindigkeit erlangt hat, so wird der Gang der Maschine gleichförmig bleiben.

382 §.

Bey eben den Voraussetzungen des vor. §. den Effect der Maschine zu finden.

Aufl. Es sey die beständige Geschwindigkeit, womit der angegriffene Punct zuletzt gleichförmig fortgeht, $= c$. Nachdem man diese aus dem vor. § gefunden hat, setze man c statt v in dem Ausdruck für P. Wenn nun in dieser Voraussetzung $P = \Pi$ wird, so ist der Effect der Maschine $= \Pi . c$ (372 §).

Z. E. Im Exempel des vor. §. war $c = h\left(1 - \sqrt{\frac{v}{\mu} \cdot \frac{q}{r} \cdot \frac{Q}{p}}\right)$, und $P = p\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2$. Setzt man c statt v, so wird $\Pi = \frac{v.q}{\mu.r} Q$, und

$$\Pi . c = \frac{v.q.h}{\mu.r} Q \left(1 - \sqrt{\frac{v}{\mu} \cdot \frac{q}{r} \cdot \frac{Q}{p}}\right).$$

Dieser Effect der Maschine hängt demnach von derjenigen Geschwindigkeit c des angegriffenen Puncts

ab, die zuletzt von beständiger Grösse bleibt. Die Geschwindigkeit c aber hängt von der Einrichtung der Maschine ab, nemlich dem Verhältniß $\frac{v}{\mu}$, imgleichen r und q, und zugleich von denjenigen Grössen, welche die Kraft P überhaupt durch v bestimmen, nemlich von p und h.

382 §.

Wenn die Kraft P als eine Function der Geschwindigkeit v des angegriffenen Puncts bekannt ist; die Einrichtung der Maschine so zu machen, daß sie einen gegebenen Effect zuwege bringe.

Aufl. Der gegebene Effect sey $= E$, so soll $P.v = E$ seyn. Aus dieser Gleichung suche man v, nachdem vorher statt P die bekannte Function von v gesetzt ist. Wenn nun diese Gleichung $v = c$ giebt, und der Halbmesser des Hauptrades $= r$ ist, so hat man

$$1)\ \mu = \frac{c}{2\pi r} \text{ (380 §)},$$

und es ist μ die Zahl der Umläufe des Hauptrades in einer Secunde. Ferner sey der Widerstand Q in der Entfernung q von der Axe des letzten Rades angebracht, und ν sey die Zahl der Umläufe desselben in einer Secunde, so hat man $2\pi.\nu.q.Q = E$, folglich

$$2)\ \nu = \frac{E}{2\pi.q.Q}.$$

Was aber insbesondre diese letzte Gleichung betrift, so ist zu bemerken, daß der gesammte von der Friction

ction gewürkte Widerstand mit in Betrachtung gezogen werden müsse. Bestehet die Maschine aus einem Hauptrade, das in einen Trilling greift, an dessen Welle der Widerstand angebracht ist, so muß man durch $q.Q$ nicht allein das Moment dieses Widerstandes, sondern zugleich das Moment der an den Zapfen der Welle vorfallenden Friction verstehen, nebst derjenigen, die zwischen Zahn und Getriebe entsteht. Wenn überdem Ff das Moment der am Hauptrade vorfallenden Friction ist, so hat man

$$2\pi.\nu.q.Q + 2\pi\mu Ff = E.$$

Man weiß also, daß zu μ Umläufe des Hauptrades ν Umläufe der letzten Welle, oder zu einem Umlauf des ersten $\frac{\nu}{\mu}$ Umläufe der letzten gehören, und daraus findet man nach dem 375§. die Anzahl der Zähne und Triebstöcke für jedes Rad und Getriebe, also die ganze Einrichtung der Maschine. Es sey z. E. $P = p\left(1 - \frac{v}{h}\right)$, $p = 100$ Pf. $h = 30$ Fuß und man verlangt es soll ein Widerstand von 300 Pf. mit der Geschwindigkeit von 2 Fuß bewegt werden; so hat man $p\left(1 - \frac{v}{h}\right)v = E$, und $E = 600$ Pf. Dies giebt $v - \frac{vv}{h} = \frac{E}{p}$, oder $vv - hv = -\frac{E}{p}h$, woraus $v = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{\left(h\left(\frac{1}{4}h - \frac{E}{p}\right)\right)}$ gefunden wird. Setzt man

also $h = 30$, $\frac{E}{p} = 6$, so wird $v = 15 \pm \sqrt{30} \times 1\frac{1}{2}$ oder $v = 15 \pm 6{,}7$. Da also der Sache auf zweyerley Art Genüge geschehen kann, so nehme man nun $c = 15 - 6{,}7 = 8{,}3$, so wird $\mu = \frac{8{,}3}{2\pi r}$, und $\nu = \frac{600}{2\pi . q . Q}$. Wenn man nun $Q = 300$ Pf. setzt, so bestimmen beyde Gleichungen die Verhältnisse $\frac{\nu}{\mu}$ und $\frac{q}{r}$, worauf die Einrichtung der Maschine ankommt.

383 §.

In allen den Fällen, wo P eine solche Function von v ist, die $= 0$, wird, wenn v eine gewisse Grenze $= h$ erreicht hat, ist der Umstand merkwürdig, daß das Product $P.v$ zweymahl $= 0$ wird, einmahl wenn $v = 0$, und zweytens wenn $v = h$ ist. Daraus ist zu schliessen, daß dies Product anfangs mit v zugleich wachse, so lange v nur klein ist, hiernächst aber wieder abnehme, wenn sich v der Grenze h nähert. Es wird also einmahl für einen gewissen Werth von v das Product $P.v$ am grösten werden: und wenn die Maschine so eingerichtet ist, daß der angegriffene Punct grade mit dieser Geschwindigkeit im Beharrungsstande der Maschine fortgehen muß, so wird die Maschine den grösten Effect leisten, der mit dieser Kraft P zuwege gebracht werden kann. Nach der Vorschrift des 343 § findet man vermittelst der Differential-Rechnung, wie groß v genommen werden müsse, damit das Product $P.v$ am grösten werde.

Es

Es sey z. E. $P = p\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2$, so hat man $P.v = \frac{p}{hh}(h-v)^2 v$. Setzt man das Differential hievon $= 0$, so erhält man die Gleichung $(h-v)^2 dv - 2v(h-v)dv = 0$, oder $h - 3v = 0$, woraus $v = \frac{1}{3}h$ folgt. Dieser Werth statt v gesetzt, giebt $P = \frac{4}{9}p$, und $P.v = \frac{4}{27}ph$.

384 §.

Diese Betrachtungen ergeben, wie man von einer solchen Kraft, die von der Geschwindigkeit einer anzulegenden Maschine abhängt, den vortheilhaftesten Gebrauch machen kann. Man muß die Maschine so einrichten, daß die Geschwindigkeit des angegriffenen Puncts grade so groß werde, als erfordert wird, wenn das Product dieser Geschwindigkeit in die zugehörige Stärke der Kraft am grösten seyn soll: übrigens aber der Effect der Maschine selbst diesem Product gleich sey.

Es sey z. E. wie vorhin $P = p\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2$, so wird $P.v$ am grösten, wenn $v = \frac{1}{3}h$ ist, und dies giebt $P.v = \frac{4}{27}ph$. Ist nun des Hauptrades Halbmesser $= r$, die Anzahl der Umläufe in einer Secunde $= \mu$: ist ferner der Widerstand Q in der Entfernung q von der Axe der letzten Welle angebracht, und die Anzahl der Umläufe in einer Secunde $= \nu$; so hat man nach dem 382 §.

I) $\mu = \frac{\frac{1}{3}h}{2\pi.r}$; II) $\nu = \frac{\frac{2}{27}ph}{\pi.q.Q}$.

385 §.

Nunmehro wird es nicht schwer seyn, über die Frage richtig zu urtheilen: was vermittelst einer gewissen an dieser oder jenen Maschine angebrachten Kraft in einer gewissen Zeit ausgerichtet werden könne; imgleichen: welche von verschiedenen Maschinen, die zu einerley Absicht dienen sollen, vortheilhafter, als die andre zu gebrauchen sey. Man muß nothwendig unterscheiden, ob die angebrachte Kraft immer gleich stark beschleunige, oder ob die Beschleunigung immer geringer werde, und endlich gar aufhöre, so daß nach dem Effect der Maschine allererst alsdenn gefragt wird, wenn ihr Gang gleichförmig geworden ist. Wenn bey einer Maschine die erste Voraussetzung statt hat, so finden Hr. Schobers Erinnerungen über den vortheilhaftesten Gebrauch der Maschine (Versuch einer Theorie von der Ueberwucht 34-36 §) ihre Anwendung. Bey allen übrigen Maschinen aber lassen sich seine Vorschriften gar nicht anbringen, und es scheinet, als wenn dieser sonst geschickte Verfasser diese Sache nicht von der rechten Seite angesehen, und den obgedachten Unterscheid nicht genug in Betrachtung gezogen habe.

386 §.

Die Theorie von der Bewegung solcher Maschinen, die durch Gewichte getrieben werden, (in der Voraussetzung, daß die Friction beständig einerley Widerstand verursache,) ist im XXI Abschnitt vollständig vorgetragen, und zugleich gewiesen worden, wie mit einer solchen Maschine eine gegebene Last am vortheilhaftesten gehoben werden könne. Wenn

Kraft

Kraft und Last gegeben sind, so kommt die Frage darauf an: das Verhältniß ihrer Entfernungen von der Bewegungs-Axe zu finden, damit die Beschleunigung am grösten werde. Herr Schober kommt im 36sten § auf diese Frage, und giebt für ein einfaches Rad und Welle die richtige Auflösung. Wenn man oben im 344 § die Trägheit des Rades nicht in Betracht zieht, also $Mkk = 0$ setzt, p statt $p - \varphi$ schreibt, und $P = p$, $Q = q$ setzt, so erhält man für den Halbmesser der Welle die Gleichung $x = a\left(\sqrt{\left(1 + \frac{P}{Q}\right)} - 1\right)$, also $\frac{x}{a} = \sqrt{\left(1 + \frac{P}{Q}\right)} - 1$, welches Hrn. Schobers Formul ist, wenn man n und m statt φ und Q schreibt. Indessen meynt Hr. Schober, daß diese Auflösung der eigentlichen Frage noch kein Genüge leiste, und er setzt diesen Grund hinzu, weil der gefundene Ausdruck weder von der Zeit, noch dem von der Kraft in dieser Zeit zurückgelegten Wege abhänge. Allein Hr. Schober hat nicht bedacht, daß dies nach der Natur der Frage nicht anders seyn könne. Es sind ja keine andere data vorhanden, als Kraft und Last, und wenn der Weg der Kraft, nebst der Zeit, darin sie ihn zurücklegen soll, schon mit vorgeschrieben sind, so kann man nicht mehr fragen, wie die Maschine bey der schnellesten Bewegung beschaffen seyn müsse, weil dadurch das Verhältniß $\frac{x}{a}$ schon bestimmt wird, wie er selbst am Ende der 52 S. bemerkt. Daher behält wohl die Auflösung der Frage selbst, in dem gehörigen Sinn genommen, ihre Richtigkeit.

387 §.

387 §.

Aber in diesem Sinn frägt man nicht nach dem vortheilhaftesten Gebrauch der übrigen Maschinen, wenn die angebrachten Kräfte veränderlich sind, und man über den eigentlichen Effect erstlich beym gleichförmigen Gange der Maschine urtheilet. Und wenn Hr. Schober auf der 53sten Seite den eigentlichen Sinn der Frage vorstellig machen will, so kommt es mir so vor, als wenn er von der gewöhnlichen oben im 371 und 380 § vorgetragenen Regel nicht die rechte Anwendung mache. Sie läst sich nur da anwenden, wo die angebrachte Kraft veränderlich ist, und einmahl aufhört, die Maschine zu beschleunigen, und zwar alsdenn allererst, nachdem der Gang schon gleichförmig geworden ist: keinesweges aber bey den von ihm betrachteten Fällen, wenn die Kraft ein Gewicht ist, das nach seiner Voraussetzung, der Friction ungeachtet, allemahl die Bewegung der Maschine beschleuniget, ohne daß ihr Gang einmahl gleichförmig werden könnte. Hier verstattet freylich das Product der Last in ihren Raum kein maximum, wie Hr. Schober selbst anmerkt, und es ist ganz wider die Natur der Sache, daß dies Product so groß werden könne, als das Product der Kraft in ihren Raum. Beyder Producte Verhältniß läst sich aus der oben im 351 § bewiesenen Gleichung $x = s\sqrt{\left(\frac{P(S-s)}{sQ} + \frac{S^2}{4s^2}\right)} - \frac{1}{2}S$ finden.

Man erhält $(x+\frac{1}{2}S)^2 = \frac{Ps(S-s)}{Q} + \frac{1}{4}S^2$, und daraus ferner $Q(x^2+xS) = Ps(S-s)$, also $Qx = \frac{S-s}{S+x}Ps$. Hieraus ergiebt sich, daß nie Qx

$= Ps$ seyn könne, wenn s und t, also auch S data sind, man mag x, wie man will, ändern; und Herr Schober bemerkt auf der 54 S. richtig, daß das Verhältniß $\frac{Qx}{Ps}$ nie die Grenze $\frac{S-s}{S}$ überschreiten könne, wenn man x kleiner nimmt, also die Last der Bewegungs-Axe nähert. Indessen wird dadurch das Product Qx gröſſer, und die Last selbst gröſſer. Allein wenn Hr. Schober daraus schlieſt, es sey eine richtige Regel, daß man allemahl mehr Vortheil erhalte, wenn man die Last dem Centro nähere; so würde man sich gewaltig irren, wenn man dies bey Maschinen, wo die angebrachten Kräfte von der Geschwindigkeit der Maschine abhängen, schlechthin anwenden wollte. Hier ist auch Herrn Schobers Theorie gar nicht anwendlich, weil bey dieser Art Maschinen der Weg der Kraft, in dem Verstande, wie dieser Ausdruck gewöhnlich genommen wird, bey der Frage von vortheilhafteſter Einrichtung einer Maschine, kein datum, sondern ein quæsitum ist (384 §). Diese Erinnerungen haben nicht die Absicht, dem Hrn. Schober Irrthümer zur Last zu legen, zumahl es aus einigen Stellen seiner Schrift nicht undeutlich erhellet, daß er dasjenige, was er von der beschleunigten Bewegung der von ihm betrachteten Maschinen ganz richtig beweiset, nicht auf alle ohne Ausnahme angewandt wissen wolle (M. s. die 73 S.). Das bisherige soll nur zur Ergänzung des Schoberschen Vortrags dienen, und diese Ergänzung schien mir vornemlich deswegen nöthig, weil sonst der Schobersche Vortrag von Anfängern leicht unrecht verstanden werden könnte.

Der XXIV. Abschnitt.

Von Maschinen, die durch Menschen oder Thiere bewegt werden.

388 §.

Die Kraft, welche ein Mensch anwendet, indem derselbe eine Last vor sich her schiebet, oder vermittelst eines Seils, oder sonst etwas dergleichen, hinter sich schleppet, gehört in die Classe der relativen Kräfte, und hängt von der Geschwindigkeit ab, welche der Last schon mitgetheilt ist. Der Mensch braucht Kraft, seinen eigenen Körper in Bewegung zu setzen und zu erhalten. Er kann seine eigene Bewegung und zugleich mit derselben eine Last beschleunigen, indem er sie entweder vor sich her schiebt, oder nach sich zieht. Allein je schneller der Mensch seinen eigenen Körper bewegt, desto geringer wird die Kraft, die er zugleich auf die Beschleunigung einer Last verwenden kann: und, vermöge der Erfahrung, giebt es eine gewisse Geschwindigkeit, bey der er die Last gar nicht weiter beschleunigen kann. Das Gesetz, wornach sich diese Kraft eines Menschen ändert, läst sich zwar nicht in völliger Schärfe angeben: wenn indessen P diese Kraft unbestimmt bedeutet, indem der Mensch mit der Geschwindigkeit c fortgeht, und diese Kraft $P = p$ ist, wenn der Mensch zuerst anfängt, die Last zu bewegen; eben diese Kraft aber verschwindet, wenn die Geschwindigkeit des Menschen schon $= k$ ist: so hat man $p =$

$p = f$, wenn $c = 0$,
$p = 0$, wenn $c = k$.

Diesen Bedingungen geschicht ein Genüge, wenn man $P = p\left(1 - \frac{c^2}{h}\right)$ setzt. Man kan eben diesen Bedingungen durch unzählig viele andere von dieser verschiedenen Gleichungen ebenfalls ein Genüge thun: indessen scheint das, was aus dieser Gleichung folgt, mit der Erfahrung sehr wohl übereinzukommen, und überdem hat diese Gleichung auch eine Aehnlichkeit mit derjenigen, welche die Kraft des Wassers ausdrückt, wenn es ein Rad treibt, wie in der Hydraulik bemerkt werden soll. Eben so drückt Hr. Euler diese Gleichung aus in der Abhandlung: Discussion plus particuliére de diverses manieres d'elever de l'eau par le moyen des pompes avec le plus grand avantage, §. XXVI. Histoire de l'Acad. de Berlin Année 1752. p. 162. Drückte man P durch p und c so aus: $P = p\left(1 - \frac{c^2}{h^2}\right)$; so würde eben den Bedingungen ein Genüge geschehen. Diesen Ausdruck braucht Hr. Euler in der Abhandlung: De machinis in genere, §. 9. Comment. Nov. Petrop. T. III. p. 270. Jener Ausdruck scheint der Erfahrung am gemässesten zu seyn.

Wenn ein Pferd eine Last zieht, so ist die Kraft desselben eine völlig ähnliche Function der Geschwindigkeit, und man kann sie eben so ausdrücken, nur daß p sowohl, als h, grösser genommen werden können, weil ein Pferd eine Last mit grösserer Gewalt anzieht, auch eine grössere Geschwindigkeit, als ein Mensch, im Laufen erreichen kann.

389 §.

Die Erfahrung muß übrigens auch entscheiden, wie groß p und h sowohl bey Menschen als Thieren genommen werden könne. Es scheint, daß ein erwachsener gesunder und mittelmäßig starker Mann eine Last von 60 Pfund ohne sonderliche Beschwerde halten, auch, wenn er keine fremde Last mit fortzuschleppen hat, mit einer Geschwindigkeit von 6 Fuß in einer Secunde laufen könne. Demnach könnte man $p = 60$ Pfund, und $h = 6$ Fuß setzen. Wenn mehr Menschen zugleich eine Last angreifen, und ihre Anzahl ist $= m$, so wird $p = m \times 60$ Pf. aber es bleibt $h = 6$ Fuß, weil jeder für sich keine grössere Geschwindigkeit erlangen kann. Man vergleiche hiemit Hn. Eulers schon angeführte Abhandlung, §. 28. Histoire de l'Acad. de Berlin, p. 163. In der Abhandlung: De machinis in genere, §. 13. Comment. Nov. Petrop. T. III. p. 273. ist $p = 70$ Pfund angenommen.

Die Kraft eines tüchtigen Pferdes schätzt Herr Euler in jener Abhandlung (XXXII §.) 7 mahl gröfser; in dieser Abhandlung (17 §.) aber 4 mahl gröfser, als die Kraft eines Mannes: also nach jener Voraussetzung $60 \times 7 = 420$ Pf., nach dieser Voraussetzung aber $70 \times 4 = 280$ Pf. Die Erfahrung muß entscheiden, welche Voraussetzung die richtigste sey. Die gröste Geschwindigkeit, womit ein Pferd laufen kann, schätzt man doppelt so groß, als die Geschwindigkeit eines Menschen, also von 12 Fuß in 1 Secunde. Wegen der Kraft, die ein Mensch oder Thier anzuwenden vermögend ist, kann man auch Leupolds Theatrum machinarum generale zu Rath ziehen, und zwar das XVII Cap. 264

u.

u. f. §§. 92 u. f. S. Imgleichen Belidors Architectura Hydraulica 1 Buch. 1 Cap. 117. u. f. §. 30 u. f. S. der 1sten Ausg. der Uebers.

390 §.

Ein Mensch oder Thier zieht eine Last Q auf einer horizontalen Ebene fort: man sucht für jede gegebene Zeit t die Geschwindigkeit c.

Aufl. Es sey die Friction $= F$, so hat man $dc =$

$$\frac{2g\left(p\left(1-\frac{c}{h}\right)^2-F\right)dt}{Q}, \text{ oder}$$

$$\frac{-dc}{F-p\left(1-\frac{c}{h}\right)^2} = \frac{2gdt}{Q}, \text{ oder auch}$$

$$\frac{-dc:F}{1-\frac{p}{F}\left(1-\frac{c}{h}\right)^2} = \frac{2gdt}{Q}. \text{ Man}$$

setze $\frac{p}{F}\left(1-\frac{c}{h}\right)^2 = zz$, so ist $\left(1-\frac{c}{h}\right)\sqrt{\frac{p}{F}} = z$, und $dz = \frac{-dc}{h}\sqrt{\frac{p}{F}}$, folglich $\frac{hdz}{\sqrt{p.F}} = -\frac{dc}{F}$. Dies giebt $\frac{h}{\sqrt{p.F}}$.

$$\frac{dz}{1-zz} = \frac{2gdt}{Q}, \text{ und wenn man diese Gleichung nach dem 319 §. integrirt, so erhält man}$$

$$\frac{h}{\sqrt{p.F}}.l\frac{\sqrt{(1+z)}}{\sqrt{(1-z)}} = \frac{2gt}{Q}+C. \text{ Fängt}$$

die Bewegung von der Ruhe an, so ist $c = o$ für $t = o$, also in eben dem Fall $z = \sqrt{\frac{p}{F}}$. Dies

giebt $\frac{h}{\sqrt{p.F}} . l \frac{\sqrt{(1+\sqrt{\frac{p}{F}})}}{\sqrt{(1-\sqrt{\frac{p}{F}})}} = C$ und

$$\frac{h}{\sqrt{p.F}} \left(l \frac{\sqrt{(1+z)}}{\sqrt{(1-z)}} - l \frac{\sqrt{(1+\sqrt{\frac{p}{F}})}}{\sqrt{(1-\sqrt{\frac{p}{F}})}} \right)$$

$= \frac{2gt}{Q}$, woraus sich t ergiebt, wenn c gegeben ist.

Die Last wird nur so lange beschleuniget, als $p\left(1-\frac{c}{h}\right)^2 > F$ ist. Wenn demnach $p\left(1-\frac{c}{h}\right)^2 = F$, also $c = h\left(1-\sqrt{\frac{F}{p}}\right)$ wird, so hört die Beschleunigung auf, und die Bewegung wird gleichförmig. Weil nun $\left(1-\frac{c}{h}\right)^2 = \frac{F}{p} zz$, so wird in eben dieser Voraussetzung $z = 1$, und dies giebt t unendlich groß, daß also eigentlich nie $c = h\left(1-\sqrt{\frac{F}{p}}\right)$ werden kann. Indessen nähert sich c diesem Werth sehr bald, und hiernächst wird die Aenderung der Geschwindigkeit fast unmerklich.

Die

Die gefundene Gleichung giebt nemlich $\frac{1+z}{1-z} =$

$\frac{1+\sqrt{(p:F)}}{1-\sqrt{(p:F)}} e^{\frac{4gt\sqrt{pF}}{b.Q}}$, wenn e die basis der natürlichen Logarithmen ist. Der Kürze wegen setze man diesen Ausdruck $= T$, so hat man $z = \frac{T-1}{T+1}$. Nun darf t nur sehr klein seyn, so ist T schon viel grösser als 1, also beynahe $z = 1$, oder beynahe $c = h\left(1 - \sqrt{\frac{F}{p}}\right)$.

391 §.

Man muß in diesen Formuln statt p ein Gewicht setzen, welches ein Mensch oder Thier würde erhalten können, wenn dasselbe an einem Seil vertical herabhinge, dies Seil aber etwa über eine Rolle geschlagen von dem Menschen, oder dem Thier, nach horizontaler Richtung angezogen würde. Ziehen mehr Menschen oder mehr Thiere zugleich, und ist ihre Anzahl $= m$; so muß man mp statt p nehmen, und es wird $c = h\left(1 - \sqrt{\frac{F}{mp}}\right)$. Ist nun $F = \frac{1}{n}Q$, so erhält man $c = h\left(1 - \sqrt{\frac{Q}{n.m.p}}\right)$. Bey eben dem Verhältniß der Friction zur Last wird also die ihr mitgetheilte Geschwindigkeit einerley seyn, wenn selbige in eben dem Verhältniß, wie die Anzahl Menschen oder Thiere vergrössert wird; so daß z. E. 1000 Pf. von 10 Männern mit eben der Geschwindigkeit bewegt werden, wie 100 Pf. von einem Mannе.

ne. Nimmt man $F = \frac{1}{3}Q$, und $p = 60$ Pf, $h =$ 6 Fuß, so erhält man $c = 6\left(1 - \sqrt{\frac{Q}{180}}\right)$ und dieser Ausdruck wird $= 0$, wenn $Q = 180$ Pf. ist. Mehr als 180 Pf. würde also ein Mann auf einen horizontalen Boden nicht fortziehen können. Wäre F nur $= \frac{1}{4}Q$, so würde $c = 6\left(1 - \sqrt{\frac{Q}{240}}\right)$ gefunden werden, und ein Mann könnte bis auf 240 Pf. ziehen.

392 §.

Es soll eine gegebene Last auf horizontalen Boden mit gegebener Geschwindigkeit fortgezogen werden: man frägt, wie viel Menschen oder Thiere dazu nöthig sind.

Aufl. Die gegebene Last sey Q, und die Friction $= \frac{1}{n}Q$, die gegebene Geschwindigkeit $= k$, so hat man $k = h\left(1 - \sqrt{\frac{Q}{n.m.p}}\right)$. Dies giebt $\frac{Q}{n.m.p} = \left(1 - \frac{k}{h}\right)^2$, und $m = \frac{Q}{np(1-k:h)^2} = \frac{F}{p(1-k:h)^2}$.

Wenn also z. E. $F = \frac{1}{4}Q$ ist, und es sollen 1000 Pf. mit der Geschwindigkeit von 3 Fuß bewegt werden, so ist $F = 250$. Nimmt man demnach $p =$ 60 Pf, $h = 6$, so wird $m = \frac{250}{60(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{250}{15}$; also sind 17 Menschen nöthig. Sollten

Pferde

Pferde gebraucht werden, und man setzt $p = 420$ Pfund, $h = 12$ Fuß (385 §.), so wird $m =$

$$\frac{250}{420\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{25\not0}{42\not0} \cdot \frac{16}{9} = 1\frac{11}{189},$$

daß also ein Pferd beynahe genügen würde.

Nach Hrn. Eulers Formuln, in der Abhandl. de machinis in genere. Comm. Nov. Petrop. l. c. und den übrigen daselbst angenommenen Voraussetzungen, würden in diesem Exempel nur etwa fünf Menschen gefunden werden. Er nimmt hier nemlich $P = p\left(1-\frac{c^2}{h^2}\right)$. Dies würde im 390 §

$dc = 2g\left(p\left(1-\frac{c^2}{h^2}\right)-F\right)dt : Q$ geben, und

die Bewegung würde gleichförmig für $p\left(1-\frac{c^2}{h^2}\right) = F$, also erhielte man $c = h\sqrt{\left(1-\frac{F}{p}\right)}$, und für die gegenwärtige Aufgabe $k^2 = h^2\left(1-\frac{Q}{n.m.p}\right)$,

folglich $m = \frac{Q}{n.p(1-k^2:h^2)} = \frac{h^2F}{p(h^2-k^2)}$.

Wenn demnach $p = 70$ Pfund, $h = 6$, so wird $m = \frac{18F}{35(36-kk)}$: und wenn $F = 250$, $k = 3$, so wäre $m = \frac{18.250}{35.27} = \frac{2.250}{3.35} = \frac{500}{105}$.

Ist aber p die Kraft eines Pferdes $= 280$ Pf. und $h = 12$, so giebt dies $m = \frac{144.25\not0}{28\not0.135} = \frac{36.25}{7.135} =$

$= \frac{36.5}{7.27} = \frac{180}{189}$, und es würde ein Pferd völlig genügen. Die Folgen aus dieser letzten Voraussetzung aber scheinen der Erfahrung nicht gemäß zu seyn.

393 §.

Ein Mensch oder Thier zieht eine Last Q, vermittelst eines Seils vertical aufwärts, man sucht für jede Zeit t die Geschwindigkeit c.

Aufl. Weil hier das ganze Gewicht der Last Q sich der Bewegung widersetzt, so hat man

$$dc = \frac{2g\left(p\left(1 - \frac{c}{h}\right)^2 - Q\right)dt}{Q},$$

$$\text{also } \frac{-dc : Q}{1 - \frac{p}{Q}\left(1 - \frac{c}{h}\right)^2} = \frac{2g\,dt}{Q}.$$

Was vor dem Gleichheits-Zeichen steht, wird eben so, wie im 390 §, integrirt, wo derselbe Ausdruck vorkommt, nur das hier Q statt des dortigen F stehet. Demnach nähert sich auch in diesem Fall die Bewegung bald der Gleichförmigkeit, und es wird beynahe $p\left(1 - \frac{c}{h}\right)^2 = Q$, also $c = h\left(1 - \sqrt{\frac{Q}{p}}\right)$.

Die Auflösung dieser Ausgabe hat also mit der Aufgabe des 390 § eine völlige Aehnlichkeit und alle aus der dortigen hergeleitete Folgen lassen sich hier ohne weitere Aenderungen anwenden, wenn man nur hier die ganze Last Q statt der dortigen Friction F setzt. Demnach wird hier die Anzahl der Menschen

schen oder Thiere, die eine gegebene Last Q mit gegebener Geschwindigkeit vertical aufwärts ziehen können $= \frac{h^2 Q}{p(h-k)^2}$ (392 §). Man kann sich übrigens davon die Vorstellung machen, daß das Seil, woran die Last hängt, über eine Rolle geschlagen sey, damit an demselben die Menschen oder Thiere horizontal ziehen können.

394 §.

Indem Menschen oder Thiere das Seil anziehen, vermittelst dessen sie die Last bewegen, wird dasselbe mit einer gewissen Gewalt gedehnt, und es muß Festigkeit genug haben, diese Gewalt auszustehen, damit es nicht reisse. Um davon eine Probe zu geben, wie man die hier erforderliche Festigkeit der Seile beurtheilen müsse, nehme man hier überhaupt an, es sey p die Kraft und P ihre eigene Masse, q der Widerstand der zu bewegenden Masse Q. Ferner sey die Gewalt der Ausdehnung des Seils an einer gewissen Stelle $= t$, die Masse des vordern Theils des Seils zwischen der angenommenen Stelle und der Kraft $=$ M, die Masse des hintern Theils $=$ N. Nun ist es soviel, als wenn die Masse Q+N von der Kraft $t-q$ bewegt wird, die Masse P+Q+M+N aber von der Kraft $p-q$, da dann beyde Beschleunigungen gleich sind. Daher hat man $\frac{dc}{2gdt} = \frac{t-q}{Q+N} = \frac{p-q}{P+Q+M+N}$, und man erhält $(t-q)(P+M)+t(Q+N) = p(Q+N)$, folglich $t = \frac{(P+M)q+(Q+N)p}{P+Q+M+N}$, oder $t = q + \frac{(Q+N)(p-q)}{P+Q+M+N}$.

Wird die Last auf einem horizontalen Boden fortgezogen, so setzt man die Friction F statt q. Wenn sie aber ein vertical herabhängendes Gewicht ist, so wird $q = Q$. In allen Fällen ist anfangs die Dehnkraft grösser, als der Widerstand, sie wird aber demselben gleich, sobald $p = q$ ist, also die Bewegung gleichförmig wird. Beym ersten Anfang der Bewegung ist also die Gefahr der Zerreissung des Seils am grösten.

395 §.

Wenn einer oder mehr Menschen eine Maschine in Bewegung setzen sollen, so ist es am vortheilhaftesten, die Einrichtung so zu machen, daß jeder mit einer Geschwindigkeit von 2 Fuß in einer Secunde arbeitet. Wird aber die Maschine von Pferden gezogen, so muß jedes Pferd 4 Fuß in einer Secunde fortgehen, um den meisten Vortheil zu erhalten.

Beweis. Der allgemeine Ausdruck der Kraft, womit Menschen oder Thiere die Maschine bewegen, ist $p\left(1 - \frac{c}{h}\right)^2$, wenn c die Geschwindigkeit des angegriffenen Puncts der Maschine ist (388 §). Demnach ist der Effect der Maschine $= p\left(1 - \frac{c}{h}\right)^2 c$ (371 §), und dieser ist am grösten, wenn $c = \frac{1}{3}h$ ist (383 §). Da nun entweder $h = 6$ oder $h = 12$, nachdem Menschen oder Pferde die Maschine bewegen, so hat man im ersten Fall $c = 2$, und im zweyten Fall $c = 4$. Jeder Mann arbeitet alsdenn mit der Kraft $= \frac{4}{9} \times 60$ Pf. $= 26\frac{2}{3}$ Pf, jedes Pferd aber

aber mit einer Kraft $= \frac{4}{9} \times 420$ Pf. $= 186\frac{2}{3}$ Pf. Der Effect der Maschine ist im ersten Fall $\frac{4}{27} . 6 . 60$ Pf $= \frac{4}{3} . 40$ Pf $= 53,3$ Pf, im zweyten Fall aber $\frac{4}{27} . 420 . 12$ Pf $= \frac{4}{9} . 420 . 4$ Pf $= 746,6$ Pf.

Wenn also ein Rad, ein Haspel, eine Winde u. s. f. von Menschen gedrehet wird, und man setzt den Halbmesser des Rades $= r$, (wodurch hier überhaupt der Abstand des angegriffenen Puncts von der geometrischen Umdrehungsaxe verstanden wird) so ist der Umfang $= 2\pi r$ (467 §. G.) und diesen Weg muß der angegriffene Punct in πr Secunden zurück legen. Dies ist also die Zeit des Umlaufs für das Rad oder den Haspel, wobey der gröste Effect erhalten wird. Wäre z. E. $r = 10$ Fuß, so müste die

$$\text{Zeit des Umlaufs} = \frac{355}{113} = 31\tfrac{4}{1}\tfrac{7}{1}\tfrac{}{3} \text{ Sec. seyn.}$$

Bey Pferden ist diese Zeit des Umlaufs halb so groß. Man wird übrigens leicht ermessen, daß man zufrieden seyn müsse, wenn diese Bestimmungen der Wahrheit nur einigermassen nahe kommen, indem bey Untersuchungen von dieser Art keine völlige Schärfe erwartet werden kann.

396 §.

Zu denjenigen Arten der Maschinen, die von Menschen bewegt werden, gehören alle Arten von Haspeln und Winden, die Leupold im Theat. Machin. Gener. IV Cap. 66-71 §. 31. 32ste S. beschreibt; imgleichen noch ausführlicher im Theatro Machinario VI Cap. 140 u. f. §§. 81 u. f. S. Den in Bergwerken gebräuchlichen Haspel beschreibt auch Henning Calvör in seinen Actis Historico-Chronologico-Mechanicis circa metallurgiam in Hercynia superiori, II. Theil IV. Cap. Iste Abth. 29-31

Seite. Wie die Pferde beym Goepel gebraucht werden, davon ist eben daselbst in der IIten Abtheil. des IV Cap. 32-34 S. die Beschreibung anzutreffen. Man sehe auch Leupolds Theatr. machin. hydraulicar. T. II. 45. 46 §. 23. 24 S. Wenn ein groses vertical stehendes Rad mit einer horizontal liegenden Welle, das übrigens mit einem Wasserrade an einer Mühle die meiste Aehnlichkeit hat, so eingerichtet wird, daß Menschen oder Thiere auf den äussern oder innern Umfang treten, und auf solche Art das Rad drehen können, so heist es ein verticales Tret- oder Lauf-Rad. Zeichnungen davon findet man beym Leupold Theat. Mach. Gener. XVII Cap. 267 u. f. §. 93 u. f. S. Theatr. Mach. Hydraul. I. Tom. III Cap. 63 §. 33 Seit. imgleichen im II Tom. II Cap. 18 §. 9 S. Bey Rädern von dieser Art würkt das ganze Gewicht des Menschen oder Thiers, daher man in dem Ausdruck der Kraft $p\left(1-\frac{c}{h}\right)^2$ den Druck p diesem Gewicht, also bey Menschen etwa einen Centner gleich schätzen kann. Man legt auch solche Räder schief gegen den Horizont, wie sie Leupold im Theatr. Mach. Gener. XVII Cap. 270. 276 S. beschreibt, da dann der Druck p in dem Verhältniß des ganzen Sinus zum Sinus des Neigungswinkels des Rades gegen den Horizont kleiner ist, als das Gewicht des Menschen oder Thiers, so das Rad treibt. Liegt ein Rad völlig horizontal, so kann ein Mensch, der darauf stehen soll, wenn er sich mit den Armen gegen einen Widerstand stemmet, das Rad unter sich mit den Füssen herum treiben. Man s. Leupold Theatr. Mach. Gen. XVII Cap. 279-283 §. 95. 96 S.

Der

Der XXV. Abschnitt.

Regeln zur vollständigen Berechnung des gesamten Widerstandes bey Maschinen.

397 §.

So wichtig es in der Lehre von den Maschinen ist, daß man die angebrachte Kraft richtig zu berechnen wisse; eben so viel ist daran gelegen, daß man bey Anlegung einer Maschine zum voraus einen Ueberschlag zu machen wisse, wie groß der gesamte Widerstand sey, den die angebrachte Kraft überwinden soll. Wenn nicht die Friction allemahl einen grossen Theil des Widerstandes ausmachte; so würde diese Berechnung des Widerstandes in manchen Fällen gar keine Schwierigkeit haben: und dahin gehören vornemlich die Fälle, wenn eine Last vermittelst eines Seils, das sich auf eine Welle aufwickelt, gehoben werden soll. In andern Fällen hängt die Berechnung des Widerstandes von vielen besondern Kenntnissen ab, die man aus speciellern Theilen der Mechanik lernen muß: wie wenn man z. E. vermittelst einer Maschine eine Anzahl Wasser-Pumpen bewegen, und dadurch zu einem besondern Gebrauch das Wasser auf eine gewisse Höhe heben wollte. In allen Fällen aber wird eine umständliche Berechnung der Friction erfordert. Ja es giebt Fälle, bey welchen eine Maschine eigentlich gar keine Last zu heben, sondern blos den Widerstand der Friction z

über

überwinden hat, wie denn dahin der Fall gehört, wenn eine sehr schwere Last auf einem horizontalen Boden fortgezogen werden soll. Eben dahin gehören alle Arten von Kornmühlen, wobey die Haupt-Absicht dahin gehet, daß ein Mühlstein über dem andern herum laufen, und die zwischen beyde geschüttete Getraide-Körner zerreiben soll. Es ist freylich am allersichersten, wenn man in Fällen von dieser Art die Stärke der Friction durch Versuche zu finden sucht, wie auch Hr. **Euler** in der Histoire de l'Academie de Berlin Année 1751. 291 S. vorschreibt. Allein man kann doch der theoretischen Berechnung der Friction nicht völlig entbehren, weil die Maschine selbst nicht ohne Friction gebauet werden kann, und eine vorläufige Berechnung der Friction höchstnothwendig ist, ehe und bevor der Bau der Maschine selbst unternommen wird.

398 §.

Es wird bey den folgenden Regeln, die Friction zu berechnen, vorausgesetzt werden, daß man die absolute Grösse der Friction, die durch das Hinschieben eines Körpers an den andern unmittelbar entstehet, als bekannt annehmen könne. Wenn p den Druck bezeichnet, der beyde Körper gegen einander prest, so kann man die absolute Grösse der Friction $= \frac{1}{n} p$ setzen, da dann die im vorhergehenden bereits vorgetragenen die Friction betreffenden Lehren (309-322 §. St. 358 u. f. Mech.) ergeben, wie groß man die Zahl n jedesmahl schätzen müsse. Uebrigens ist noch zu bemerken, daß hier die Friction als ein unveränderlicher Widerstand zu betrachten sey. Wenn

es nemlich gleich seine Richtigkeit hätte, daß die Friction von der Geschwindigkeit der reibenden Körper abhinge (362 §); so sucht man hier doch eigentlich die Stärke der Friction für den Beharrungsstand der Maschine, bey welchem die Geschwindigkeit, also auch die Friction, unveränderlich bleibt. Da es nun schon seine grossen Schwierigkeiten hat, den Coefficienten $\frac{1}{n}$ für die Friction der Ruhe zu bestimmen, so würde man doch nicht von der völligen Richtigkeit des Resultats der Rechnung überzeugt seyn können, wenn man gleich die Aenderung der Friction, welche von der Geschwindigkeit herrührt, mit in Betrachtung ziehen wollte. Deswegen schränkt man gewöhnlich diese Untersuchung auf die Friction der Ruhe ein. Hätte es indessen mit der oben im 362 u. f. §§ vorgetragenen Segnerischen Theorie von der Friction seine Richtigkeit; so würde die ganze Aenderung der Rechnung nur auf folgende Betrachtung ankommen. Die absolute Grösse der Friction der Ruhe sey $F = \frac{1}{n} p$, so ist nach der Segnerischen Theorie für die Geschwindigkeit c die Friction $f = \frac{c\, l(\varphi : F)}{k}$ F. e (362 §), wenn die Friction φ der Geschwindigkeit k zugehört, und e die basis des Logarithmen-Systems ist. Wenn also der Theil der Maschine, an welchen die Friction f entsteht, sich mit der Geschwindigkeit c bewegt, und den Druck p leidet, so hat man $f = \frac{1}{n} e^{\frac{c\, l(\varphi : F)}{k}} . p.$

Wollte

Wollte man also alles dieser Theorie gemäß berechnen, so müste man den für die Friction der Ruhe gehörigen Coefficienten $\frac{1}{n}$ noch mit $e^{\frac{c\,l(\varphi:F)}{k}}$ multipliciren. Um indessen die Schwierigkeiten der Rechnung für die Ausübung nicht zu häufen, soll die Sache so betrachtet werden, als wenn die Friction der Ruhe von der Friction der Bewegung nicht unterschieden, und überhaupt die Friction eine beständige Grösse wäre. Dies läst sich um so mehr ohne grossen Irrthum annehmen, da selbst nach den Segnerischen Beobachtungen der Coefficient $\frac{l(\varphi:F)}{k}$ gemeiniglich nur ein kleiner Bruch, also $e^{\frac{c\,l(\varphi:F)}{k}}$ nicht viel grösser als 1 ist, es wäre denn, daß c sehr groß sey, welches bey den gebräuchlichsten Maschinen eben nicht zutrift. Um nun sicher zu seyn, daß die Rechnung, welche eigentlich auf die Friction der Ruhe gerichtet ist, den Widerstand nicht zu klein gebe, den die Kraft zu überwinden hat, wenn die Maschine in Bewegung ist, so ist nur nöthig, den Coefficienten $\frac{1}{n}$ lieber etwas grösser zu nehmen, als die im XII. Abschnitt der Statik angeführten Versuche ergeben. Die Theorie trift mit der Erfahrung gut genug zusammen, wenn man $n = 3$, und die Friction überhaupt $= \frac{1}{3}p$ setzt.

399 §.

Es sind *BC*, *DC*, *EC*, die Halbmesser eines Rades, der zugehörigen horizontal liegenden Welle, und des Zapfens. An *B* und *D* sind die Kraft *P* und die Last *Q* nach den Tangenten *BP* und *DQ* des Rades und der Welle angebracht. Ferner sind *AC* und *aC* Durchschnitte einer horizontalen Ebene mit der Ebene des Rades und eines durch *CD* verticalen Durchschnitts der Welle, so daß $BCA = \alpha$, $aCD = \beta$ die Winkel sind, unter welchen *BC* und *DC* die horizontale Ebene durch *AC* schneiden. Kraft und Last sind im Gleichgewicht, und man sucht eine Kraft *F*, die in *B* nach *BP* angebracht die Friction aufhebt.

Aufl. Wenn man alles genau nehmen will, so muß man die Friction eines jeden Zapfens besonders suchen. Wenn demnach ERS der eine Zapfen, und C sein Mittelpunct ist; so sey CM vertical, C*p* mit BP, und C*q* mit DQ parallel, und das Gewicht von Rad und Welle sey $= M$. Man suche nach dem 125 §. St. den Theil *m* des Gewichts M, den C trägt, imgleichen die von PF und Q herrührenden Pressungen auf C nach den Richtungen C*p* und C*q*. Wenn nun *p* und *q* diese Pressungen sind, so zerlege man jede derselben in zwo andre nach horizontaler und verticaler Richtung, und man erhält statt C*p* $= p$ die Pressungen

$$CG = p \sin\alpha, \quad CH = p \cos\alpha;$$

statt C*q* aber die Pressungen

$$CI = q \sin\beta, \quad CK = q \cos\beta.$$

Demnach leidet der Punct C den verticalen Druck

CM

$CM = p\cos\alpha + q\cos\beta + m$, und den horizontalen Druck $CN = q\sin\beta - p\sin\alpha$. Beyde zusammen geben den mittlern Druck

$CL = \sqrt{((p\cos\alpha + q\cos\beta + m)^2 + (q\sin\beta - p\sin\alpha)^2)}$,

und die Lage der Richtung CL, welche die Unterlage in E trift, bestimmt der Winkel MCL, dessen Tangente $= \frac{q\sin\beta - p\sin\alpha}{p\cos\alpha + q\cos\beta + m}$. Demnach ist die Friction bey E nach der Richtung Ef auf CE senkrecht $= \mu . CL$, dafern sich überhaupt $\mu : 1$, wie die Friction zum Druck verhält. Hiebey ist übrigens noch zu bemerken, daß in der Zeichnung der Winkel β stumpf angenommen sey, daß also $\cos\beta$ das entgegengesetzte Zeichen haben müsse, wenn $\beta <$ 90° ist.

Eben so müste nun auch die Friction des zweyten Zapfens gesucht werden: und die ganze Sache kommt darauf an, die Grösse und Richtung des Drucks auf den hintern Zapfen zu finden. Man siehet aber leicht, wenn m', p', q' das für den hintern Zapfen sind, was m, p, q für den vordern Zapfen waren, und $C\lambda$ den Druck auf den hintern Zapfen vorstellt, wenn C der Mittelpunct des hintern Zapfens ist, daß

$C\lambda = \sqrt{((p'\cos\alpha + q'\cos\beta + m')^2 + (q'\sin\beta - p'\sin\alpha)^2)}$

sey, und die Richtung $C\lambda$ mit der Verticallinie einen Winkel mache, dessen Tangente $= \frac{q'\sin\beta - p'\sin\alpha}{p'\cos\alpha + q'\cos\beta + m'}$ ist. Demnach ist die Friction auf beyde Zapfenlager zusammen $= \mu(CL + C\lambda)$. Mit derselben soll F im Gleichgewicht seyn, da P und Q für sich im Gleichgewicht sind. Also hat man $CB . F = \mu CE . (CL + C\lambda)$, und

aus

aus dieser Gleichung läst sich F finden, wenn man statt CL und Cλ die gefundenen Werthe, und in demselben P + F statt $p + p'$ setzt. Die Anwendung auf einige besondere Fälle wird dies deutlicher machen.

400 §.

I.) Wenn $\alpha = 0$ und $\beta = 180°$ ist, also CB und CD beyde horizontal sind, so wird der Winkel MCL für beyde Zapfen $= 0$, und die Richtung des Drucks vertical. Ueberdem $CL = p + q + m$, und $C\lambda = p' + q' + m'$, also $CB.F = \mu.CE(P+F+Q+M)$, woraus $(CB - \mu CE)F = \mu.CE(P+Q+M)$ und $F = \frac{\mu CE(P+Q+M)}{CB - \mu CE}$ folgt.

II.) Wenn Zapfen und Welle gleiche Halbmesser haben, überdem auch die Kraft am Umfang der Welle angebracht, also $CB = CD = CE$ ist, so wird $F = \frac{\mu}{1-\mu}(P+Q+M)$. Ist demnach $\mu = \frac{1}{3}$, so wird $F = \frac{1}{2}(P+Q+M)$, und für diesen Fall hat Belidors Regel (Architectura Hydraul. I. Buch II Cap. 243 §. 62 S.) ihre Richtigkeit. Aber nach seiner Regel a. a. O. 251 §. müste in dem kurz vorhin betrachteten Fall $F = \frac{\frac{1}{2}CE(P+Q+M)}{CB}$ seyn, wenn $\mu = \frac{1}{3}$ ist, da statt dessen die gefundene Formul $F = \frac{CE(P+Q+M)}{3CB - CE}$ giebt, und hiernach muß Belidors Regel verbessert werden, welche in diesem Fall F zu groß giebt. Hr. Belidor hat nemlich nicht bedacht, daß die Kraft F desto kleiner sey,

und eben deswegen desto weniger den Druck vermehre, je weiter sie von der Bewegungsaxe abstehet, und daß eben daher auch die absolute Grösse der Friction viel kleiner ausfallen müsse, als in dem Fall, wenn F eben so weit von der Bewegungsaxe als die reibende Fläche entfernt ist.

401 §.

III.) Wenn C der Schwerpunct des Rades mit der Welle wäre, und beydes Kraft und Last in der auf die Umdrehungs-Axe durch C senkrecht gesetzten Ebene angebracht wären: so würden die Verhältnisse $m:m'$, $p:p'$, $q:q'$ gleich seyn, wie man aus dem 125 §. Stat. leicht schliest. Setzt man also $m' = km$, $p' = kp$, $q' = kq$; so wird auch $C\lambda = k.CL$, und die Winkel, welche CL und $C\lambda$ mit der Verticallinie machen, werden gleich, so daß beyde in einer Ebene liegen. Demnach würde in diesem Fall eine Kraft $= CL + C\lambda$, in dem Schwerpunct C mit CL parallel angebracht, beyde Zapfen eben so stark drücken, als jede der Kräfte CL und $C\lambda$ für sich den zugehörigen Zapfen drückt. Dies ergiebt die Natur der Sache, und es fliest auch aus den obigen allgemeinen Formuln. Diese geben für die Bestimmung der Friction auf beyden Zapfen zusammen die Gleichung $CB.F = \mu.CE.(1+k)CL$. Eben dies erhält man nun kürzer, wenn man C als den Punct betrachtet, woran die Kräfte $P+F$ und Q unmittelbar, jede in ihrer Richtung, angebracht sind, ohne die Pressung auf jeden Zapfen besonders zu berechnen. Schreibt man allenthalben $p+kp$, $q+kq$, $m+km$, statt p, q, m, in der für CL gefundenen Formul, so wird daraus $(1+k)CL = CL + C\lambda$.

Man

Man kann also unter den angenommenen Bedingungen

$$CL=\sqrt{(((P+F)\cos\alpha+Q\cos\beta+M)^2+(Q\sin\beta-(P+F)\sin\alpha)^2)}$$

setzen, so ist CL der gesammte Druck auf beyde Zapfen, und man hat für die Friction die Gleichung

$$CB.F=\mu.CE\sqrt{(((P+F)\cos\alpha+Q\cos\beta+M)^2+(Q\sin\beta-(P+F)\sin\alpha)^2)};$$

überdem wird $\text{tang}\,MCL=\frac{Q\sin\beta-(P+F)\sin\alpha}{(P+F)\cos\alpha+Q\cos\beta+M}$.

Dieser Fall findet seine Anwendung, wenn die Scheibe *ABZ* eine Rolle, und *ESR* ihr Polzen ist.

402 §.

Wenn die Ebene, welche durch die Richtungen der Kraft und Last auf die Umdrehungsaxe senkrecht stehen, nicht beyde zusammen durch den Schwerpunct des Rades und der Welle gehen, so werden CL und $C\lambda$ einander nicht allemahl parallel seyn, und wenn sie dies nicht sind, so kann man diese beyden Pressungen nicht auf eine bringen, die beyden äquipollent ist. Deswegen läst sich die im vorigen § gelehrte Verkürzung der Rechnung nicht anbringen, wenn man alles genau nehmen will. Weil indessen hier keine völlige Schärfe zu erwarten ist, so betrachtet man gewöhnlich allemahl die Sache so wie im vor. §. In der That wird auch der Schwerpunct eben so gedruckt, als wenn Kraft und Last, jede in ihrer Richtung, am Schwerpunct angebracht wäre. Deswegen kann man allemahl so wie im vor. §. den davon abhängenden Druck auf beyde Zapfen zugleich suchen. Doch ist das nicht der gesammte Druck, den die Zapfen leiden. Wenn nemlich am Schwer-

punct die entgegengesetzten Kräfte angebracht wären, so würde nicht alles im Gleichgewicht seyn, sondern die angebrachten Kräfte würden noch die Axe um den Schwerpunct zu drehen streben, davon denn allerdings noch ein Theil des Drucks auf die Zapfen herrührt. Es geschicht also blos um die Rechnung bey einer Untersuchung zu verkürzen, die keine völlige Schärfe erwarten läst, wenn man die Sache allemahl so wie im vor. § betrachtet, und die daselbst am Ende gefundene Gleichung als algemein richtig braucht, welches sie eigentlich alsdenn nur ist, wenn die mittlern Richtungen des Drucks auf jeden Zapfen für sich einander parallel sind.

403 §.

Wenn die Kraft blos das Rad drehen soll, ohne zugleich eine Last zu heben, so wendet man die gefundene Gleichung an, indem man $Q = o$ setzt, und weil nun keine Kraft P nöthig ist, so ist auch $P = o$, wie der Voraussetzung des 399 § gemäß ist. Daher findet man die Kraft F, welche für die Friction nöthig ist, aus der Gleichung

$$CB.F = \mu CE\sqrt{(F\cos\alpha + M)^2 + F^2\sin\alpha^2)} = \mu CE\sqrt{(M^2 + 2F.M.\cos\alpha + F^2)}$$

und $\text{tang } MCL = -\frac{F\sin\alpha}{F\cos\alpha + M}$.

Das Zeichen (—) deutet nur an, das CL nun auf der andern Seite von CM nach A zu liege. Nimmt man diese nun für die positive Seite, so kann das Zeichen — wegbleiben. Diese Gleichungen kommen mit Hr. Eulers Formuln Histoire de l'Academie de Berlin Année 1748 p. 136 überein. Wenn nemlich CZ vertical, und $BCZ = \varphi$ ist, so wird

$\varphi = 90 - \alpha$, und wenn man φ statt α braucht, $CB = a$, $CE = b$, so hat man mit Hr. Euler

$$a.F = \mu b\sqrt{(M^2 + 2F.M\sin\varphi + F^2)}$$

und $\text{tang } MCL = \dfrac{F\cos\varphi}{M + F\sin\varphi}$,

nur das hier das Gewicht von Rad und Welle $= M$, bey Hr. Euler $= P$ gesetzt ist. Um nun F zu finden schliest man

$$aaF^2 = \mu^2b^2M^2 + 2\mu^2b^2F.M\sin\varphi + \mu^2b^2F^2,$$

$$(aa - \mu^2b^2)F^2 - 2\mu^2b^2M\sin\varphi.F = \mu^2b^2M^2$$

$$F^2 - \frac{2\mu^2b^2M\sin\varphi}{aa - \mu^2b^2}F = \frac{\mu^2b^2M^2}{aa - \mu^2b^2},$$

und daraus folgt

$$F = \frac{\mu^2b^2M\sin\varphi}{aa - \mu^2b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu^2b^2M^2}{aa - \mu^2b^2} + \frac{\mu^4b^4M^2\sin\varphi^2}{(aa - \mu^2b^2)^2}\right)}$$

oder $F =$

$$\frac{\mu^2b^2M\sin\varphi \pm \sqrt{(a^2\mu^2b^2M^2 - \mu^4b^4M^2 + \mu^4b^4M^2\sin\varphi^2)}}{aa - \mu^2b^2}$$

oder auch $F = \dfrac{\mu bM(\mu b\sin\varphi \pm \sqrt{(a^2 - \mu^2b^2\cos\varphi^2)})}{aa - \mu^2b^2}$.

Bey dieser Formul ist zu bemerken, daß F allemahl positiv seyn müsse. und daß die Zweydeutigkeit des Wurzelzeichens nur unter dieser Einschränkung statt habe. Der Ausdruck läst sich verkürzen, wenn man Zehler und Nenner durch μ^2b^2 dividirt, und sodann $\frac{a}{\mu b} = n$ setzt, dies giebt $F =$

$$\frac{M(\sin\varphi \pm \sqrt{(nn - \cos\varphi^2)})}{nn - 1}.$$ Nun ist gewöhnlich

lich $a \succ b$, also $\frac{a}{b} \succ 1$. Weil nun auch μ nicht gröſſer als $\frac{1}{3}$, also $\frac{1}{\mu}$ nicht kleiner als 3, folglich $\frac{1}{\mu\mu}$ nicht kleiner als 9 ist; so ist $nn \succ 9$, und daraus ergiebt sich, daß im Zehler nur das Zeichen + vor dem Wurzelzeichen statt haben könne. Je gröſſer nun φ wird, desto gröſſer wird F, und es ist F am gröſten, wenn $\varphi = 90°$ ist, also CB in CA fällt. Es ist nun $F = \frac{M(1+n)}{(nn-1)} = \frac{M}{n-1}$.

Für $\varphi = 0$, wenn CB in CZ fällt, hat man $F = \frac{M\sqrt{(nn-1)}}{nn-1} = \frac{M}{\sqrt{(nn-1)}}$. Nimmt man CB auf der andern Seite von CZ, so daß φ negativ wird, so hat man $F = \frac{M(\sqrt{nn-cos\varphi^2})-sin\varphi)}{nn-1}$, und wenn $\varphi = -90°$ ist, also CB in C*b* fällt, da dann P aufwärts zieht; so ist $F = \frac{M(n-1)}{nn-1} = \frac{M}{n+1}$, und es ist nunmehro F am kleinsten. Herr Euler berechnet a. a. O. 145-148 S. auch die Friction für den Fall, wenn die Zapfen des Rades auf zwo andre kleine Räder liegen, wie im 129 §. Stat. Aus den bisher vorgetragenen Gründen lassen sich seine Formuln leicht herleiten.

404 §.

204 Fig. Es sey *ABDE* die Grundfläche einer schwe-

ren

ren Scheibe, die auf einen horizontalen Boden liegt, und sich um ihre verticale geometrische Axe, die also durch den Mittelpunct C geht, drehen kann. In einer auf die Umdrehungsaxe senkrechten Ebene ist nach der Richtung GF, in der Entfernung $CG = f$ von der Axe, die Kraft F angebracht, welche die Scheibe zu drehen strebet: man frägt, wie groß F seyn müsse, wenn diese Kraft, der Friction das Gleichgewicht halten soll.

Aufl. Die reibende Fläche ist hier die Grundfläche der Scheibe, und diese ist mit dem Gewicht der Scheibe beschwert, welches auf der Grundfläche ABDE proportional verbreitet ist. Wenn der Kreis PQRS ein Stück der Grundfläche ist; so verhält sich der Druck auf dies Stück zum ganzen, wie die Fläche PQRS zur Fläche ABDE. Es sey des Kreises PQRS Halbmesser $CP = x$, und des Kreises ABDE Halbmesser $CA = a$, so läst sich auf folgende Art ein allgemeiner Ausdruck für das Moment der Friction finden. Es sey m dies Moment der Friction für den Kreis PQRS, und der Theil des Gewichts, womit dieser Kreis beschwert ist, $= P$. Der Halbmesser $CP = x$ wachse um das Stück $Pp = \Delta x$, so wird m um die Differenz Δm wachsen, so wie P um die Differenz ΔP wächst. Mit dem Halbmesser Cp sey der Kreis $pqrs$ beschrieben, so ist Δm das Moment der Friction, welche die Fläche des Ringes zwischen PQRS und $pqrs$ verursacht. Man sieht leicht, daß $\Delta m > \mu x \Delta P$ und $\Delta m < \mu(x+\Delta x)\Delta P$ sey, so daß des Verhältnisses $\frac{\Delta m}{\Delta P}$ Grenze $\frac{dm}{dP} = \mu x$, oder $dm = \mu x dP$ wird. Der Druck auf die ganze

Scheibe ABDE sey = Q, so ist Q : P = $aa : xx$; also P = $\frac{Q}{aa} xx$, und $dP = \frac{2Q}{aa} xdx$, folglich $dm = \frac{2\mu Q}{aa} xxdx$. Dies giebt $m = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu Q}{aa} x^3$, wo keine constans zugesetzt wird, weil $m = 0$ ist für $x = 0$. Man setze $x = a$, so hat man für die ganze Scheibe ABDE das Moment der Friction = $\frac{2}{3} \mu Q a$. Dies giebt die Gleichung $Ff = \frac{2}{3} \mu Q a$, und $F = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{f} \cdot \mu Q$.

Demnach ist das Moment der Friction so groß, als es bey eben dem Druck für eine horizontal liegende Welle seyn würde, wenn ihr Halbmesser $\frac{2}{3}$ des Halbmessers der vertical stehenden Scheibe betrüge.

Eben die Rechnung behält ihre Richtigkeit, wenn gleich die Scheibe ausser ihrem eigenen Gewicht sonst noch mit einer Last beschweret ist, da man denn in der gefundenen Formul statt Q die Summe des eigenen Gewichts der Scheibe und der darauf sonst noch drückenden Last setzen muß.

405 §.

205 Fig. Es ist *ABD* ein Rad, dessen Welle *EG* vertical stehet: man sucht, wie groß eine am Umfang des Rades angebrachte Kraft F seyn muß, um der Friction an der Grundfläche des untern Zapfens das Gleichgewicht zu halten.

Aufl. Das ganze Gewicht des Rades mit der Welle und dem Trilling RS drückt auf die Grundfläche

fläche HL der Pfanne HIKL, worin der untere Zapfen läuft: daß also die reibende Fläche hier wie im vor. §. ein Kreis ist, nemlich die Grundfläche des untern Zapfens. Wenn demnach Q das ganze Gewicht des Rades, Trillings und der Welle, und r der Halbmesser des Zapfens ist; so ist vermöge des vor. § das Moment dieser Friction $= \frac{2}{3}\mu Qr$; also $F = \frac{2}{3}.\frac{r}{AC}.\mu Q$, wenn AC der Halbmesser des Rades ist.

406 §.

Es ist GI ein um den festen Punct G beweglicher Hebel, woran bey E die Last Q senkrecht drückt; er liegt auf das äusserste Ende B eines andern um C beweglichen Hebels, woran bey A die Kraft P senkrecht zieht, und mit Q im Gleichgewicht ist; so daß, wenn P den Hebel AB drehete, nicht allein der andre Hebel GI zugleich um G gedrehet würde, sondern auch B gegen I zu rücken, und sich an dem Hebel GI reiben müste. Der Winkel $ABI = \varphi$ ist gegeben, und man frägt, um wieviel man P vermehren muß, damit das Gleichgewicht mit Last und Friction zusammen erhalten werde. 206 Fig.

Aufl. Es sey F diejenige Kraft, um welche man P wegen der Friction vermehren muß, so wird der Punct B von der Kraft P+F nach der auf AB senkrechten Richtung BN mit einer Gewalt $p = \frac{AC.(P+F)}{BC}$ gedruckt: von der Last Q aber nach der auf GI senkrechten Richtung BH mit der Gewalt $q = \frac{EG.Q}{BG}$. Die Kraft P allein drückt B nach

der Richtung BN mit einer Gewalt $= \frac{AC}{BC} P$.

Man zerlege den Druck BH nach den Richtungen BR und BS auf AB senkrecht, und damit parallel; so wird $BR = \frac{EG.Q}{BG} \cos\varphi$, und wegen des Gleichgewichts zwischen P und Q hat man $\frac{AC}{BC} P = \frac{EG}{BG} Q\cos\varphi$, indem BS von der Unterlage C aufgehalten wird: also ist $P = \frac{BC.EG}{AC.BG} Q\cos\varphi$.

Die Friction widerstehet dem Punct B nach der Richtung BG mit der Gewalt $BD = \mu q$, und aus beyden Kräften BH und BD zusammen entstehet die mittlere $BK = q\sqrt{(1+\mu^2)}$. Diese zerlege man wiederum nach BL und BM auf AB senkrecht und damit parallel und setze den Winkel $HBK = \alpha$; so wird $BL = q\cos(\varphi-\alpha)r(1+\mu^2)$, und dieser Druck muß $= p$ seyn, weil dem Druck BM die Unterlage C widersteht. Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{AC}{BC}(P+F) = \frac{EG}{BG} Q\cos(\varphi-\alpha)r(1+\mu^2),$$

und $P+F = \frac{BC.EG}{AC.BG} Q\cos(\varphi-\alpha)r(1+\mu^2)$.

Wenn $\varphi = 0$ ist, so daß beyde Hebel einerley Lage haben, so ist $P = \frac{BC.EG.Q}{AC.BG}$ wegen des Gleichgewichts mit Q. Setzt man also zum Grunde, daß für diese Lage der Hebel $P = \Pi$ sey, so hat man

man $F = \Pi(\cos(\varphi - \alpha)\sqrt{(1+\mu^2)} - \cos\varphi)$. Ferner ist $\text{tang}\alpha = \frac{BD}{BH} = \mu$, also $\sec\alpha = \sqrt{(1+\mu^2)} = \frac{1}{\cos\alpha}$. Dies giebt $F = \Pi\left(\frac{\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha} - \cos\varphi\right)$. Wenn demnach $\varphi = 0$ ist, so ist $F = 0$, und wenn $\varphi = 90°$, so wird $F = \Pi\,\text{tang}\alpha$. Uebrigens ändern sich P und F alle beyde, wenn sich φ ändert, und es ist die Summe $P+F$ am grösten, wenn $\varphi - \alpha = 0$, also $\varphi = \alpha$ ist. Dieser Fall giebt $P+F = \Pi\sqrt{(1+\mu^2)} = \Pi\sec\alpha$. In der Voraussetzung, daß $\mu = \frac{1}{3}$ sey, wird $\alpha = 18° 26'$, weil $\text{tang}\alpha = \mu = 0{,}3333333$, daher ist $\sec\alpha = \sqrt{(1+\mu^2)} = 1{,}0540826$ beynahe $= \frac{19}{18}$. Für diesen Fall also wird $P + F = \frac{19}{18}\Pi$.

Alle diese Schlüsse behalten noch ihre Richtigkeit, wenn gleich ACB ein gebrochener Hebel ist, dessen Arme AC und BC bey C einen gefälligen Winkel einschliessen. Uebrigens aber ist hiebey noch zu bemerken, daß sich bey würklich erfolgter Umdrehung des Hebels AB um C auch GB ändere, weil der Punct B gegen I rückt, wenn der Winkel φ grösser wird. Wenn der Abstand beyder Bewegungspuncte CG gegeben ist, so hat man im Dreyeck BCG ausser dem Winkel $CBI = 180° - \varphi$, die Seiten BC und CG, und daraus läst sich GB für jede Lage der Hebel trigonometrisch berechnen.

407 §.

In der Ebene eines Rades ist die Kraft P 207 nach der Richtung AP, in der Entfernung AC Fig. vom Mittelpunct angebracht, und die Zähne H, L, desselben greifen zwischen die Triebstec-

cken

ecken K, M eines Trillings, an dessen Welle eine Last Q zieht: man sucht, um wie viel die Kraft P, welche für sich mit Q im Gleichgewicht ist, vermehrt werden muß, um mit Last und Friction zusammen das Gleichgewicht zu halten.

Aufl. Indem der Halbmesser des Rades CH in die Lage CL kommt, schiebt derselbe den anliegenden Triebstock aus K nach M, und indem der Zahn L den Triebstock M bey B verläßt, fängt der folgende Zahn H an, den folgenden Triebstock K zu berühren. Man kann sich also ACB und BGE, als zwey gebrochene Hebel vorstellen, die sich unter den Umständen des vor. § befinden, so daß $CBI = \varphi$ ist, wenn CB nach I verlängert wird, und man erhält

$$P+F = \frac{BC.EG.\cos(\varphi-\alpha)}{AC.BG.\cos\alpha}Q, \text{ wenn } \alpha =$$

18° 26′ ist. So müste man eigentlich die Rechnung für jeden Winkel φ besonders anstellen, wobey auch zu bedenken wäre, daß sich CB und GB während der Umdrehung ändern. Es wird hier aber eine gewisse Grenze geben, die der Winkel φ nicht übertrift, die man auf folgende Art suchen kann. Aus der Anzahl der Triebstecken läst sich der Winkel HGB finden, für den Fall, wenn der Zahn L den Triebstock M verläst, wenn man nemlich 360° durch diese Anzahl dividirt; da dann ferner im Dreyeck BCG aus dem Winkel HBG und den anliegenden Seiten CG und GB der Winkel CBG, folglich CBI $= 180° - CBG = \varphi$ gefunden wird. Je mehr Triebstecken also das Getriebe hat, desto kleiner wird HGB seyn. Man wird aber nicht leicht mehr, als höchstens 20 Triebstecken brauchen, und in den meisten

sten Fällen nimmt man viel weniger. Daher wird HGB nie kleiner, als 18° seyn. Folglich CBI = φ gewiß allemahl bis auf 18° 26 Minuten wachsen, welches der Fall ist, da P + F am grösten seyn muß. Deswegen begnügt man sich, in der Ausübung nur für diesen Fall die Rechnung anzustellen, und nimmt

$$P + F = \frac{19}{18} \cdot \frac{BC \cdot EG}{AC \cdot BG} \cdot Q,$$

da dann BC der Halbmesser des Rades ist, die Länge des Zahns mit eingerechnet, und BG der Abstand der Mitte der Triebstecken von der Axe des Getriebes.

Wäre die Kraft P gegeben, und man sollte die Last Q suchen, die ihr mit Inbegrif der Friction das Gleichgewicht hält, so muß $P = \frac{19}{18} \cdot \frac{BC \cdot EG}{AC \cdot BG} Q$

seyn, also wird $Q = \frac{18}{19} \cdot \frac{AC \cdot BG}{BC \cdot EG} P.$

408 §.

Es greifen mehr Räder und Getriebe in einander, wie im 127 § Stat., am Umfang des Rades ist die Kraft *V*, am Umfang der Welle die Last *P* angebracht: man sucht, wie groß *V* seyn müsse, daß sie mit der Last und Friction zusammen im Gleichgewicht sey. 62 Fig.

Aufl. Wenn *a*, *b*, *c* die Halbmesser der Räder, und α, β, γ die Halbmesser der zugehörigen Wellen sind, so leidet der Zahn K des mittelsten Rades von der Last P wegen der zwischen O und F vorfallenden Friction einen Druck $Y = \frac{19}{18} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\gamma}{c} \cdot P$; und eben diesen Druck würde der Zahn K leiden, wenn

an

an der Welle E des mittelsten Rades eine Last $Q = \frac{19}{18} \cdot \frac{\gamma}{c} P$ angebracht wäre. Soll nun diese mit V im Gleichgewicht seyn; so hat man wegen der zwischen K und D vorfallenden Friction $Q = \frac{18}{19} \cdot \frac{b}{\beta} \cdot \frac{a}{\alpha} V$ (407 §); also wird auch $\frac{18}{19} \cdot \frac{b}{\beta} \cdot \frac{a}{\alpha} V =$

$\frac{19}{18} \cdot \frac{\gamma}{c} \cdot P$, und dies giebt $V = \frac{19^2}{18^2} \cdot \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{a \cdot b \cdot c} P$.

Wäre noch ein viertes Rad, also der Fall dreymahl vorhanden, daß Rad und Getriebe in einander eingreift, so erhellet eben so, daß man V erstlich nach dem 127 §. Stat. suchen, hierauf aber, was heraus kommt, noch mit $\frac{19^3}{18^3}$ multipliciren müsse. Ist überhaupt der Fall n mahl vorhanden, daß Rad und Getriebe in einander eingreift, so muß man den, nach dem 127 §. Stat. für V gefundenen Ausdruck mit $\frac{19^n}{18^n}$ multipliciren. Uebrigens weiß man, daß statt des Bruchs $\frac{19}{18}$ der Ausdruck $\sqrt{(1+\mu^2)}$ gesetzt werden müsse, wenn man sich an die Voraussetzung $\mu = \frac{1}{3}$ nicht binden will.

Man sieht leicht, daß hier und im vor. §, die Friction an den Zapfen der Räder Kürze halber beyseite gesetzt sey, die man nach dem 401 § besonders berechnen muß.

409 §.

408 Fig. Um die kreisrunde Scheibe *FGH* liegt eine Schnur, woran gleiche Kräfte *V* und Q nach den

den Richtungen der Tangenten GV und HQ ziehen: man sucht, wie stark die Schnur gegen die Scheibe gepreſt werde.

Aufl. Um den Kreisbogen GH, so weit an demselben die Schnur anliegt, sey eine regulär gebrochene Linie ABDE beschrieben, so daß die äussersten Stücke AB und DE den Bogen GH in seinen Endpuncten G und H berühren. Man nehme an, die Schnur sey um diese gebrochene Linie gelegt, und werde von den gleichen Kräften V und Q nach eben den Richtungen BA und DE gezogen; so erhellet, daß nur die Winkelpuncte B, D, u. s. f. von der Schnur gepreſt werden, übrigens aber die Schnur zwischen den Winkelpuncten allenthalben mit einer Gewalt $=V$ gedehnt sey. Demnach wird der Punct B von zween Kräften nach A und D gedruckt, die beyde $=V$ sind, und daraus entsteht nach der mittlern Richtung BC, die durch des Kreises Mittelpunct geht, eine Kraft $= \frac{2BK}{AB} V$, wenn nemlich BC und AD einander in K schneiden. Nun ist $AB:BK = BC:BG$, also der Druck nach $BC = \frac{2BG}{BC} V$.

Man setze die gebrochne Linie, habe n Winkelpuncte, so ist der Bogen $GI = \frac{1}{n} GH$, und $\frac{BG}{BC} = \frac{tang \frac{1}{2n} GH}{sec \frac{1}{2n} GH} = \frac{sin \frac{1}{2n} GH}{CG}$, also der Druck nach $BC = 2V \sin \frac{1}{2n} GH$, und der gesamte

samte Druck auf alle Winkelpuncte

$$= \frac{2n\,V \sin \frac{1}{2n} GH}{CG}.$$

Dieser Ausdruck ist allemahl richtig, wie groß auch n genommen wird. Setzt man $n = \infty$, so wird dieser Druck

$$= \frac{2\infty\,V \sin \frac{1}{\infty} . \frac{1}{2} GH}{CG} = \frac{2V . \frac{1}{2} GH}{CG}$$

$$(466\,\S.\ \text{Geom.}) = \frac{V.GH}{CG}.$$

Wenn also die Kraft V einerley ist, so ist auf eben der Scheibe der Druck dem Bogen proportional, den die Schnur umfasset: und wenn die Scheibe nebst dem von der Schnur umfasten Bogen einerley bleibt, die Kraft V aber verschieden ist, so ist der Druck auf den Umfang der Scheibe der Kraft V proportional.

410 §.

209 Fig. An die Schnur $QABV$, die den Bogen $AB = x$ umfast, ziehen die entgegen gesetzten Kräfte V und Q nach Richtungen BV und AQ, welche die unbewegliche Scheibe $ABDE$ berühren: man frägt, wie groß V seyn muß, um mit Q und der zwischen der Schnur und dem Bogen AB vorfallenden Friction im Gleichgewicht zu seyn.

Aufl. Der Bogen $AB = x$ wachse um das Stück $BM = \Delta x$, und an M ziehe nach der Tangente MW die Kraft W. Man setze $V = Q + X$, so ist X die Friction auf AB, und weil $W > V$ seyn muß,

muß, so setze man $W = Q + X + \Delta X$, so ist ΔX die auf BM vorfallende Friction. Wenn nun an B nach der Richtung BF, die BV entgegengesetzt ist, eine Kraft $Q + X$ angebracht, und W mit dieser Kraft und Friction auf BM im Gleichgewicht seyn sollte; so müste ebenfalls $W = Q + X + \Delta X$ seyn. Es ist aber der Druck auf $BM > \frac{BM}{BC}(Q + X)$, und eben der Druck ist $< \frac{BM}{BC}(Q + X + \Delta X)$; also ist auch

$\Delta X > \frac{\mu . \Delta X}{BC}(Q + X$, und $\Delta X < \frac{\mu . \Delta X}{BC}(Q + X + \Delta X)$

weil $BM = \Delta x$. Beyde Grenzen gehen zusammen, wenn Δx, also zugleich ΔX verschwindet; also erhält man $dX = \frac{\mu dx}{BC}.(Q + X)$, oder $\frac{dX}{Q + X} = \frac{\mu dx}{r}$, wenn man $BC = r$ setzt. Die Integration giebt $l(Q + X) + C = \frac{\mu x}{r}$ (315 §), und für $x = o$ ist $X = o$, also $C = -lQ$, und $l\frac{Q + X}{Q} = \frac{\mu x}{r}$. Daraus folgt $Q + X = Qe^{\frac{\mu x}{r}}$.

Es sey $AB = a$, so ist $V = Qe^{\frac{\mu a}{r}}$, und wenn $ABD = 2a$, so ist $V = Qe^{\frac{2\mu a}{r}}$. Schreibt man also im

letzten Fall P statt V, so hat man $V:P = 1 : e^{\frac{\mu a}{r}}$, aber auch $Q:V = 1 : e^{\frac{\mu a}{r}}$, also $Q:V = V:P$, und $P = V \times \frac{V}{Q}$. Ist ABDE $= 3a$, und an E eine Kraft R nach der Tangente ER angebracht, die mit Q und der Friction zusammen das Gleichgewicht hält, so ist $R = Qe^{\frac{3\mu a}{r}}$, und $P:R = 1 : e^{\frac{\mu a}{r}}$, folglich wiederum $V:P = P:R$, und $R = \frac{PP}{V} = V \times \frac{V^2}{Q^2}$. Demnach gehen Q, V, P, R in geometrischer Progreßion fort, und man sieht leicht, daß dies Gesetz allgemein so fort gehe. Wenn an dem Endpunct eines Bogens $= na$ eine Kraft S zieht, die mit Q und der Friction zusammen das Gleichgewicht hält, so ist S das *n*te Glied einer geometrischen Progreßion, wovon Q und V die beyden ersten Glieder sind; also $S = V \times \frac{V^{n-1}}{Q^{n-1}}$. Hat man demnach V für einen gewissen Bogen *a* durch einen Versuch gefunden, so findet man leicht S für jedes multiplum von *a*.

Z. E. Ueber einen horizontal liegenden Cylinder liegt eine Schnure, woran die Gewichte P und Q hängen, und die Schnur fast einen Halbkreis vom

Quer-

Querschnitt des Cylinders: wegen der Friction muß P = 4 Pf. seyn, wenn Q = 2 Pf. ist. Geht nun stat dessen die Schnur $3\frac{1}{2}$ mahl um den Cylinder herum, so daß sie 7 Halbkreise faßt; so muß ein Gewicht S, das mit Q und der Friction im Gleichgewicht ist, $= 2^6 \times 4$ Pf. $= 256$ Pf. seyn. Die Umgänge der Schnur um den Cylinder formiren hier zwar eigentlich keine Kreise, indessen ist die Abweichung vom Kreise desto geringer, je dünner die Schnur ist, und die Rechnung weicht nicht viel von der Wahrheit ab. Herr Belidor hat mit allerhand Walzen und Seilen von verschiedener Dicke eine ziemliche Anzahl Versuche angestellt, die mit der Rechnung nach Wunsch übereingekommen sind. (Architectura Hydraul. I. Buch II. Cap. 306 §. 85 S. 1 Ausg. der Ueb.) Man siehet daraus, daß die Friction solcher um einen festen Cylinder gewundenen Seile ungemein stark sey: wie denn an den Meer-Ufern die grösten Schiffe wider die Gewalt des Windes und der Bewegung des Meeres dadurch hinlänglich gesichert werden, wenn man nur ein dickes daran befestigtes Schif-Seil drey bis viermahl um einen Pfahl herum gehen läst.

411 §.

Von dem Widerstande, den die Unbiegsamkeit der Seile beym Gebrauch der Maschinen verursacht, ist im 119 §. der Statik bereits einige vorläufige Nachricht gegeben worden, um aber die Berechnung des Widerstandes bey Maschinen vollständig anzustellen, muß man die Resultate der daselbst bereits angeführten Versuche des Hrn. Amantons zu Hülfe nehmen. Die Versuche selbst wurden auf folgende Art angestellt. An der Decke eines Zimmers

oder einem andern gehörig unterstützten Gestelle, befestiget man zwo gleich lange Schnüre, die etwa 5 bis 6 Zoll weit von einander herabhängen, und ein kleines Bret schwebend erhalten, worauf man Gewichte legt, welche die Schnüre anziehen. Beyde Schnüre sind einmahl auf einerley Art um eine Walze gewunden, so wie KDGHBP um eine Walze, deren Querschnitt der Kreis AHBG vorstellt. Am Umfang der Walze läst man eine zarte Schnur, oder ein sehr biegsames Band herab hängen, woran unten bey L eine kleine Schaale befestiget ist, darin man Gewichte *p* legt, welche die Walze zu drehen, und auf solche Art das Seil bey B zu biegen streben. Diese Gewichte vermehrt man so lange, bis die Walze anfängt sich zu drehen. Man muß, wie leicht erhellet, jedesmahl das halbe Gewicht Q der Walze dazu rechnen, weil dies eigene Gewicht der Walze sie eben so zu drehen strebt, als wenn es in C hienge, und das halbe Gewicht in A aufgehängt eben das thäte. Folgende Tafel enthält einen Auszug aus Amantons Versuchen:

210 Fig.

Gewicht am Seil	Dicke des Cylinders			Dicke des Seils
	$\frac{1}{2}$ Zoll	1 Zoll	$\frac{3}{2}$ Zoll	
60 Pf.	225 Loth	112 Loth	75 Loth	0,5 Zoll
	90 -	45 -	30 -	0,2 -
	45 -	$22\frac{1}{2}$ -	15 -	0,1 -
40 Pf.	150 -	75 -	50 -	0,5 -
	60 -	30 -	20 -	0,2 -
	30 -	15 -	10 -	0,1 -
20 Pf.	75 -	$37\frac{1}{2}$ -	25 -	0,5 -
	30 -	15 -	10 -	0,2 -
	15 -	$7\frac{1}{2}$ -		0,1 -

Gewichte am Bande

Es folgt hieraus die allgemeine Regel: Wenn um eine Walze, deren Durchmesser $= d$, ein Seil geht, dessen Dicke $= \delta$, und daran ein Gewicht p hängt, am Bande aber das Gewicht f erfordert wird; wenn ferner um eine andre Walze, deren Durchmesser $= D$ ist, ein Seil geht, dessen Dicke $= \Delta$, und daran ein Gewicht P hängt, am Bande aber das Gewicht F erfordert wird; so ist

$$f : F = \frac{p \cdot \delta}{d} : \frac{P \cdot \Delta}{D}.$$

Nollet, der diese Versuche wiederholt hat, (Leçons de Physique 3 Th. 123. u. f. S. der Uebers.) findet zwar auch $f : F = p \cdot \delta : P \cdot \Delta$, wenn $d = D$; aber wenn $p = P$, und $\delta = \Delta$, findet er nicht $f : F = \frac{1}{d} : \frac{1}{D}$ bey ungleichen Durchmessern der Walze. Wenn $\delta = \Delta = 3$ Lin. $p = P = 60$ Pf, so findet er $f = 114$ Unzen, wenn $D = 1$ Zoll: und $f = 135$ Unzen, wenn $d = \frac{1}{2}$ Zoll; also $f : F = 1\frac{7}{38} : 1$, statt dessen, daß nach Amontons Versuch $f : F = 2 : 1$ herauskommen sollte. Die Sache verdient also noch eine fernere Untersuchung.

Indessen läst sich die anscheinende Verschiedenheit des Resultates der Versuche vielleicht so heben. Herr Noller hat vermuthlich das jedesmahl erforderliche Gewicht p auf einerley Abstand von B reducirt. Auf solche Art würde sein Versuch ergeben, daß die Schwierigkeit das Seil zu krümmen, bey kleinern Walzen nicht sonderlich grösser werde. Herr Amontons hat eine solche Reduction, wie es scheint nicht vorgenommen, daher muste er bey einer Walze, die den einfachen Durchmesser hatte, nothwendig noch-

mahl soviel Gewicht in die Schale legen, als bey einer Walze die den doppelten Durchmesser hatte, wenn gleich der Widerstand des Seils für sich betrachtet in beyden Fällen nicht sonderlich unterschieden war. Auf solche Art behielte es dennoch mit der Proportion $f : F = \frac{p \cdot \delta}{d} : \frac{P \cdot \Delta}{D}$ seine Richtigkeit.

412 §.

Es ist die Dicke des Seils Δ gegeben, nebst dem Durchmesser D der Walze, die das Seil umfasset, und dem Gewicht P, welches das Seil dehnet: man sucht, wie groß die am Umfang der Walze angebrachte Kraft F seyn muß, die der Unbiegsamkeit des Seils das Gleichgewicht hält.

Aufl. Amontos schließt aus seinen Versuchen folgende Regel: Wenn ein Seil, das 1 Linie im Durchmesser dick ist, von 1 Pf. Gewicht gedehnt wird, und um eine Walze von 1 Zoll im Durchmesser geht; so wird 1 Loth am Umfang der Walze wegen der Unbiegsamkeit des Seils erfordert. Man setze also im vor. §. $p = 1$ Pf, $\delta = 1$ Linie, $d = 1$ Zoll, so hat man $f : F = \frac{1 \text{ Pf.} \times 1 \text{ Lin.}}{1 \text{ Zoll}} : \frac{P \cdot \Delta}{D}$. Da nun in eben diesem Fall $f = 1$ Loth wird, so folgt daraus die Regel:

Das Gewicht P, welches das Seil dehnt, drücke man in Pfunden aus, multiplicire es mit der Dicke des Seils in Linien ausgedrückt, und dividire, was herauskommt, durch den Durchmesser der Rolle in Zollen ausgedrückt; so giebt das Resultat die gesuchte Kraft F in

Lothen

Lothen ausgedrückt, die man durch die Division mit 32 auf Pfunde bringen kann.

Z. E. das Seil wird von 400 Pf. gedehnt, es ist 8 Linien dick, und der Walze Durchmesser 5 Zoll.

Dies giebt $F = \frac{400 \times 8}{5} = 640$ Loth $= 20$ Pf.

413 §.

Wenn AHBG eine untere Rolle ist, woran vom Mittelpunct C eine Last Q herab hängt, die vermittelst des Seils KDGAM nach AM aufwärts gezogen werden soll; so befindet sich das Seil unter eben den Umständen, wie im vor. §. und muß sich bey B aufwärts biegen, wenn die Rolle steigt. Frägt man nun, um wieviel eine bey A nach AM angebrachte Kraft wegen der Unbiegsamkeit des Seils grösser seyn muß, als zum Gleichgewicht mit Q erfordert wird; so wird die Rechnung eben so wie im vor. §. angestellt. 21(Fig.

Wenn BHAG eine obere Rolle ist, die im Mittelpunct C eine feste Unterlage hat, und an derselben hängt bey A ein Gewicht p herab, welches auf der andern Seite das bey B herabhängende Gewicht P heben soll; so wird sich das Seil PBHAL bey B biegen müssen, wenn p sinken soll. Um nun zu finden, wieviel Kraft wegen des davon abhängenden Widerstandes erfordert wird; nehme man an, es sey CH ein verticaler Halbmesser der Rolle, und an H sey nach der horizontalen Richtung HF die Kraft F angebracht, welche dem Widerstande das Gleichgewicht hält. Da nun der Abstand der Richtungslinie dieser Kraft von dem Punct B in diesem Fall $=$ CH nur halb so groß ist, als er in dem vorigen Fall war,

die übrigen Umstände aber einerley sind; so muß r in diesem Fall nochmahl so groß seyn. Nachdem also vermöge der Regel des 412 §. das Product des Gewichts, welches das Seil dehnt, in die Dicke des Seils gefunden worden; so muß man in dem gegenwärtigen Fall nur mit dem Halbmesser der Rolle dividiren, und nicht wie im vorigen Fall mit dem Durchmesser.

414 §.

Eine obere Rolle hat im Durchmesser 24 Zoll, ihr Polzen 1 Zoll: über dieselbe geht ein Seil 18 Linien dick, und mit demselben soll eine Last von 800 Pf. hinauf gezogen werden. Man frägt, wie groß das Gegengewicht seyn muß, wenn es der Last und dem gesammten Widerstande die Wage halten soll.

Aufl. Wenn sonst kein Widerstand, als allein die Last zu überwinden wäre, so würden 800 Pfund Kraft erfordert werden. Wegen der Unbiegsamkeit des Seils wird überdem noch eine Kraft $= \frac{800 \times 18}{12} = 1200$ Loth oder $37\frac{1}{2}$ Pf. erfordert. Mit diesem Gewicht zusammen würden nun an der Rolle $1637\frac{1}{2}$ Pf. hängen, die den Polzen drücken, wozu noch das Gewicht der Rolle selbst gerechnet werden müste, welches aber Herr Belidor, bey dem dies Exempel vorkommt, (Architectura Hydraul. I Buch. II Cap. 314 §) nicht angiebt. Da es die Friction am Polzen nicht sonderlich vermehren wird, kann es auch hier beyseit gesetzt werden, und man erhält nach dem 400 § für die Friction des Polzens $\frac{0{,}5 \times 1637{,}5}{3 \times 12 - 0{,}5} = 23$ Pf. Statt dessen hat Hr. Beli-

Belidor 34 Pf, welches von der Unrichtigkeit seiner im 400 § angeführten Regel herrührt. Demnach ist der gesammte Widerstand $800 + 37\frac{1}{2} + 23 = 860\frac{1}{2}$ Pf.

415 §.

Uebrigens sind nun beym Gebrauch der Seile folgende Umstände noch wohl in Betrachtung zu ziehen. Die Unbiegsamkeit der Seile vermehrt den Widerstand desto mehr, je schneller sie um eine Walze oder Rolle laufen müssen. Wenn also bey einer Maschine solche Seile vorkommen, die sich nach verschiedenen Geschwindigkeiten biegen müssen, so rechnet man etwas mehr Widerstand auf diejenigen, die sich schneller, als die übrigen biegen.

Weil dickere Seile den Widerstand mehr, als dünnere vermehren, so muß man keine dickere brauchen, als wegen der nothwendigen Festigkeit, die man nach dem 182 §. Stat. finden kann, unumgänglich erfordert wird. Die Dicke des Seils vermehrt überdem auch das Moment der daran hangenden Last, wenn es um eine Welle gehet; und man muß, um das Moment der Last richtig zu finden, die Summe des Halbmessers der Welle und der halben Dicke des Seils in die Last multipliciren.

Neue Seile sind unbiegsamer als alte, die durch den Gebrauch nach und nach biegsamer geworden sind. Auch sind die neuen Seile besonders bey etwas schneller Bewegung der Gefahr zu zerreissen weit mehr als alte von eben der Dicke unterworfen.

416 §.

Die bisherigen Lehren werden zur Genüge ergeben, daß mehr als gemeine Geschicklichkeit, und

nicht bloſſe Theorie, ſondern zugleich eine geübte Erfahrung dazu gehöre, eine Maſchine zu dieſer oder jenen Abſicht anzugeben. Man muß viel Gelegenheit gehabt haben, beym Maſchinen-Weſen umzugehen, wenn man ein Werk von der Art unternehmen will. Es iſt nicht genug, daß man etwa nur eine Parthey Räder und andre Hebezeuge in Verbindung bringt: man muß die Maſchine ſo einfach einzurichten bemühet ſeyn, als die Umſtände zulaſſen; und dies nicht allein wegen Erſparung der Koſten, ſondern auch deswegen, um die Friction ſo geringe zu machen, als möglich iſt, die bey den Maſchinen deſto ſtärker wird, jemehr die Maſchine zuſammengeſetzt, oder wie man ſich gewöhnlich ausdrückt, je mehr ſie überſetzt iſt. Nachdem der erſte Entwurf gemacht iſt, muß man ihn von allen Seiten genau prüfen, um die Fehler deſſelben zu entdecken und zu verbeſſern. Man muß, wenn ein wichtiges und koſtbares Werk angelegt werden ſoll, mehr als einen Entwurf machen, dieſe verſchiedenen Entwürfe gegen einander halten, um unter denſelben den beſten zu wählen. Mehrere hiezu nöthige Kenntniſſe wird man aus den folgenden mechaniſchen Wiſſenſchaften im fünften Theil dieſes Lehrbegrifs lernen.

Der XXVI. Abschnitt.

Beschreibung eines Korn-Mahl-Ganges, nebst Berechnung einer Hand- und Roß-Mühle.

417 §.

Um die bisherige allgemeine Theorie von den Maschinen durch die Anwendung auf eine besondre Art derselben zu erläutern, wird es nicht undienlich seyn, hier eine Beschreibung derjenigen Stücke herzusetzen, die allen Kornmühlen gemein sind, und worauf die ganze Einrichtung derselben vornemlich ankommt. Es ist eine bekannte Sache, daß das Getreyde zwischen zweenen Mühlsteinen gemahlen, oder zerreiben wird, welche die Gestalt einer Walze haben, deren Höhe etwa der fünfte, auch wohl der vierte, oder der dritte Theil des Durchmessers ihrer Grundfläche ist. Beyde werden so auf einander gesetzt, daß ihre geometrischen Axen in eine grade Linie fallen, jedoch müssen sie einander nicht berühren. Der untere, welcher der **Bodenstein** heist, liegt fest: der obere aber, der so genannte **Läufer** steckt auf einer vertical stehenden eisernen Stange als seiner Axe, die das **Mühleisen** heist, und wird mit derselben vermittelst eines daran befindlichen Trillings von der übrigen Maschine herum getrieben. Beyde Steine müssen in der Mitte durchbohrt seyn: der untere, weil das Mühleisen hindurch gehet, der obere, um durch die Oefnung das Getreyde zwischen beyde Steine

ne zu schütten. Die obere Fläche des Bodensteins und die untere Grundfläche des Läufers sind bey den französischen Mühlen nicht völlig eben, sondern beyde ein wenig conisch. Die Fläche des Bodensteins ist erhaben, und die Fläche des Läufers hohl. Wenn der Durchmesser des Läufers 6 Fuß beträgt, so beträgt die Höhe seiner untern conischen Fläche oder ihre Axe nur 1 Zoll, und die Höhe der erhabenen conischen Fläche des Bodensteins ist nur 9 Linien, oder $\frac{3}{4}$ Zoll. Daher nähern sich die Flächen beyder Mühlsteine einander gegen den Umkreis zu immer mehr, und dies hat die Absicht, damit das herein fallende Getreyde desto leichter vom Mittelpunct gegen den
211 Umfang geschleudert werde. Die Einrichtung ist
Fig. übrigens so gemacht, daß der Läufer nach Gefallen erhöhet, und wieder gesenkt werden kann, und dies erhält man auf folgende Art. Die Pfanne E, worin der untere Zapfen des Mühleisens läuft, ist in einem Querholz FG, dem so genannten Steg angebracht, welches nur in soweit befestiget ist, daß es nicht seitwärts weichen kann. Uebrigens aber läßt es sich durch untergeschobene Keile bey G erhöhen und erniedrigen. Man richtet sich mit der Zwischenweite des Läufers und Bodensteins darnach, ob das Getreyde mehr oder weniger fein zerrieben werden soll. In der Entfernung von $\frac{2}{3}$ des Halbmessers der Mühlsteine vom Mittelpunct muß der Zwischen-Raum etwa nur $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ von der Dicke eines Getreyde-Korns ausmachen. So sollen die Mühlsteine nach Belidors Vorschrift in der Architectura Hydraulica 1 Th. 2 Buch. 1 Cap. 3te Ausg. der Uebers. 635 §. 2 S. eingerichtet seyn. Es scheinet aber, als wenn man dies in Deutschland eben nicht

beobachtete. In Beyers Schauplatz der Mühlenbaukunst sind beyde Grundflächen der Mühlsteine eben gezeichnet, auch findet sich bey ihm keine Vorschrift, die conische Gestalt betreffend. Ich habe mich bey Mühlenbauverständigen in hiesiger Gegend nach diesen Umstand erkundiget, und man hat mir versichert, daß gewöhnlich ganz ebene Steine gebraucht würden, die Ungleichheit der Flächen ausgenommen, welche man ihnen durch das sogenannte Schärfen giebt. Uebrigens sind die Mühlsteine mit einer Einfassung, der Zarge oder dem Lauft umgeben, woran seitwärts in dem so genannten Mehlbaum ein Loch befindlich ist, durch welches das gemahlne Getreyde abläuft.

418 §.

Zu einer vollständigen Mühle gehört ferner noch die Einrichtung, daß sie das Getreyde selbst nach und nach zwischen die Mühlsteine schütte. In solcher Absicht ist oberhalb der Steine ein Gefäß angebracht, das die Gestalt einer abgekürzten und umgekehrten Pyramide hat, und der Rumpf heist. Statt des Bodens ist unten an demselben ein an Schnüren vorwärts abhängiger Deckel, der Schuh, angebracht, und zwar so, daß man ihn vermittelst einer kleinen Winde aufziehen und niederlassen kann, so viel es nöthig ist. Unten am Schuh befindet sich ein Zapfen, der Rührnagel, der bis in das Loch des Läufers reicht, und in diesem Loch ist ein eiserner Ring mit zwey Zähnen, oder so genannten Warzen angebracht, die beym Umlauf des Steins beständig an den Nagel und dadurch den Schuh hin und her stossen, und auf solche Art das in dem Rumpf aufgeschüttete Getreyde nach und nach herabschütten. End-

lich

lich wird noch erfordert, daß die Mühle das Mehl von der Kleye scheide, dafern fein Mehl verlangt wird. Diese Absicht wird durchs Beuteln erreicht. Das geschrotete Getreyde fällt durch das Mehl-Loch in einen langen nicht sonderlich weiten Beutel. Dieser steckt durch einen Kasten, der in solcher Absicht zu beyden Seiten für diesen Beutel gehörige Oefnungen hat. Der Beutel selbst wird durch verschiedene kleine Reifen in der Ründe erhalten, und eben diese Reifen dienen dazu, ihn in dem Kasten aufzuhängen. Das geschrotete Korn läuft durch diesen nach der Länge des Kastens abhängig hängenden Beutel von einem Ende zum andern, indem der Beutel selbst, bey jedem Umlauf des Getriebes am Mühleisen, einigemahl hin und wieder geschüttelt wird, damit das Mehl herausstäube, welches in den Kasten, die dadurch abgesonderte Kleye aber zum untersten Ende des Beutels herausfällt. Das Schütteln des Beutels geschicht vermittelst der Daumen, welches die Enden einiger Triebstecken sind, die über die obere oder untere Scheibe des Trillings etwas hervorspringen, und beym Umlauf an den Arm einer stehenden Welle, den Anschlag anstossen, so daß dadurch diese so genannte Setz-Welle schnell hin und wieder gedrehet wird. An der letztern befindet sich ein Zapfen, der vermittelst zweyer rechtwinklicht zusammen gesetzten Hölzer, der Räde-Schiene, und Räde-Scheere, eine horizontalliegende Welle, die Räde-Welle hin und wieder drehet, und mit ihr den an derselben befindlichen Räde-Armen schnell auf und nieder bewegt, und die an ihn angehängten Beutel schüttelt. Die XIIte Tafel in Beyers Mühlen-Schauplatz macht dies al-

les in einer guten Zeichnung vorstellig, und man kann alles in einer jeden Mühle leicht selber in Augenschein nehmen. Diese ganze bisher beschriebene Einrichtung macht einen sogenannten **Mühlengang** aus. Von dem, was die Wasser- und Windmühlen eigenes haben, wird die Hydraulik und Pneumatik nähern Unterricht geben.

419 §.

Von den Wassermühlen kann man indessen vorläufig folgende Einrichtung merken. Wenn das grosse Wasser-Rad vertical steht, und eine horizontalliegende Welle hat, so treibt es entweder nur einen oder zwey Mahlgänge, nachdem man viel oder wenig Wasser hat. Im ersten Fall befindet sich an der Welle des Wasserrades ein Kron-Rad, oder von den Müllern so genanntes Kamm-Rad, welches in den Trilling am Mühl-Eisen greift, und auf solche Art alles in gehörige Bewegung setzt. Belidor in der Architect. Hydraul. I Th. 2 Buch 1 Cap. 3te Ausg. der Uebers. 648 u. f. §. 9 u. f. Seite giebt folgende Abmessungen aller Theile einer von den zu la Fere befindlichen Mühlen an.

Das Wasser-Rad hat im Halbmesser 8 Fuß von der Bewegungs-Axe bis an den Mittelpunct der Schaufeln gerechnet. Die Schaufeln sind $2\frac{1}{2}$ Fuß breit und $9\frac{2}{3}$ Zoll hoch, also ihr Quadrat-Inhalt 2 Quadratfuß 2 Quadr. Zoll. (Die Mühl-Welle wird gewöhnlich 15 bis 18 Zoll stark im Durchmesser gemacht.) Die eisernen Zapfen an der Mühl-Welle sind 18 Linien dick, das Kammrad hat 4 Fuß im Halbmesser, nemlich vom Mittelpunct bis an die Mitte der Kämme. Dies Kammrad hat 48 Kämme, die 4 Zoll weit hervor stehen, $3\frac{1}{2}$ Zoll breit,

vorn

vorn 2 Zoll, hinten aber $2\frac{3}{4}$ Zoll dick sind. Der Trilling besteht aus zwoen Scheiben, im Durchmesser 22 Zoll, und 4 Zoll dick, welche mit 9 Triebstecken verbunden sind, so $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser haben, und 18 Zoll Höhe. Die Mittelpuncte dieser Triebstecken stehen in einem Kreise um die Axe des Mühl-Eisens herum, der 9 Zoll im Halbmesser hat, und also den Halbmesser des Getriebes abgiebt. Es versteht sich, daß Kämme und Triebstecken von sehr gutem harten Holz gemacht werden müssen. Das Mühl-Eisen ist $2\frac{1}{2}$ Zoll ins Gevierte stark, die Höhe richtet sich nach der Höhe des Orts, wo der Läufer liegt, (sie ist bey dieser Mühle nicht angegeben,) ihr Zapfen in der untern Pfanne ist 6 Linien dick. Der Läufer hat 6 Fuß im Durchmesser, und ist 16 Zoll hoch.

Wenn man auf solche Art auch die Abmessungen aller übrigen Stücke der Maschine, des Kranzes und der Arme am Wasserrade, die Länge der Mühlwelle, die Grösse der Arme und Felgen am Kammrade u. s. f. und ihre eigene Schwere kennet, so läst sich daraus leicht das Gewicht eines jeden dieser Stücke berechnen. Die eigene Schwere des Eichenholzes und des Eisens ist im 47 §. Hydrostat. angegeben. Herr Belidor schätzt einen Cubicfuß Eichenholz 60 Pf. schwer, und er hat durch einen hydrostatischen Versuch für das Gewicht eines Cubicfusses derjenigen Art Steine, so zu Mühlsteinen gebraucht werden, 110 Pf. gefunden (a. a. O. 651 §.). Er hat bey eben beschriebener Mühle nach angestellter Abmessung und Berechnung für das Gewicht des Wasser- und Kammrades nebst der Mühlwelle 3015 Pfund, und für das Gewicht des Läufers mit dem

Mühleisen und dem daran befindlichen Trilling 4348 Pfund gefunden.

420 §.

Bey dieser Mühle läuft das Wasser unter dem Mühlrade weg, und setzt es durch den Stoß an die Schaufeln in Bewegung. Wie der Druck des Wassers gegen die Schaufeln sich berechnen lasse, wird die Hydraulik lehren. So viel siehet man wohl, daß die mittlere Richtung dieses Drucks mitten durch die Schaufeln gehen, und auf dieselben senkrecht seyn werde, wenn das Wasser senkrecht daran stößt, wie hier angenommen wird. Wenn man die Grösse dieses Drucks kennet, und dabey die Friction der Zapfen der Mühlwelle und des Mühleisens, imgleichen die zwischen Kämme und Getriebe vorfallende Friction gehörig in Betracht ziehet, so läst sich der Widerstand berechnen, den das Getreyde der Bewegung des Läufers entgegen setzt. Dieser Widerstand würkt hier auf eine ähnliche Art, wie sonst die Friction zwischen zwoen Schriben, wovon die eine auf der andern herumläuft (404 §). Nur widerstehet hier das Getreyde eigentlich der Bewegung, indem es zerrieben wird, und es gehet damit ohngefehr so zu. Indem sich die Körner zwischen die Steine klemmen, wird der Läufer ein wenig gehoben, so daß die Körner einen Theil seines Gewichts tragen, und nun wird der Widerstand, welchen die Körner dem Umlauf entgegen setzen, zu dem Theil des Gewichts, das auf die Körner drückt, ein gewisses Verhältniß haben. Es sey dies Gewicht $= p$, und der Widerstand $= \mu p$, der Halbmesser des Läufers $= r$, so wäre das Moment des Widerstandes $= \frac{2}{3} r . \mu p$, wenn der Druck zwischen beyden Steinen auf das dazwischen liegende

Getreide gleichförmig verbreitet, und die ganze Fläche des Bodensteins damit bedeckt wäre. Wegen der conischen Gestalt der reibenden Flächen, und wegen der in der Mitte beyder Steine befindlichen Oefnung, findet nun zwar der angeführte 404 § hier eigentlich nicht in völliger Schärfe seine Anwendung. Indessen ist die Abweichung der Grundflächen beyder Steine von der Gestalt einer ebenen Fläche so sehr geringe, daß man auch hier die Sache so betrachten kann, als wenn der gesamte Widerstand in der Entfernung von $\frac{2}{3}$ des Halbmessers angebracht wäre.

421 §.

Es sey nun

der Halbmesser des Wasserrades $= a = 8$ Fuß
der Halbmesser des Kammrades $= b = 4$ Fuß
der Halbmesser des Trillings $= c = 9$ Zoll
der Halbmesser des Läufers $= r = 3$ Fuß
der Halbmesser der Mühleisen-Zapfen $= e = 3$ Lin.
der Halbmesser der Zapfen der Mühlwelle $= f = 9$ Lin.
der Druck des Wassers gegen die Schaufeln des Wasserrades $= P$
das Gewicht des Wasserrades mit seiner Welle und dem Kammrade $= M = 3015$ Pf.
die Friction der Zapfen an der Mühlwelle $= F$
das Gewicht des Läufers des Mühleisens und Trillings zusammen $= R = 4348$ Pf.
der Widerstand, den das Getreyde dem Umlauf des Läufers entgegensetzt $= X$.

Vermöge des 405 § ist das Moment der Friction des Mühleisen-Zapfens $= \frac{2}{3} e . \frac{1}{3} R$. Ferner ist das Moment des von Getreyde verursachten Widerstandes $= \frac{2}{3} r . X$. Das Moment der Kraft, die das Kammrad umtreibt, ist $a . P - f . F$, also hat man wegen der Friction zwischen Kamm und Triebstecken

$$a . P - f . F = \frac{19}{18} . \frac{b}{c} . (\tfrac{2}{3} e . \tfrac{1}{3} R + \tfrac{2}{3} r X) \text{ (407 §)}$$

und diese Gleichung giebt

$$\frac{18}{19} . \frac{c}{b} . (a . P - f . F) = \tfrac{2}{3} e . \tfrac{1}{3} R + \tfrac{2}{3} r X,$$

$$\text{also } X = \frac{18}{19} . \frac{c}{b} . \frac{aP - fF}{\frac{2}{3} r} - \frac{e}{r} . \tfrac{1}{3} R,$$

da dann X eine Kraft ist, die in der Entfernung $\frac{2}{3} r$ von der Axe des Mühlsteins angebracht der Bewegung eben so stark widerstehen würde, als ihr die vom Getreyde verursachte Friction widerstehet.

422 §.

Alle übrige Grössen in dieser Gleichung sind schon aus den vorhin angegebenen datis bekannt, nur die Kraft P nicht, und die davon abhängende Friction F. Nach Herrn Belidors Rechnung ist bey der bisher beschriebenen von ihm untersuchten Mühle $P = 200$ Pf, (die Gründe, worauf die Berechnung dieser Kraft beruhet, werden in der Hydraulik vorkommen), und es war $M = 3015$ Pf. Wenn man alles genau nehmen wollte, so müste man nach dem 399 §. die Friction eines jeden Zapfens der Mühlwelle besonders suchen, und denn die Summe beyder statt F setzen. Das Gewicht drückt vertical unterwärts, an die untere Schaufel drückt das Wasser mit der Gewalt von 200 Pf. nach horizontaler Richtung; im

Fall des Gleichgewichts also müste der Trilling dem obersten Zahn des Kammrades mit einer Gewalt von 400 Pf. gleichfalls horizontal entgegen drücken. Also wäre im 421 § $M = 3015$ Pf, $P = 200$ Pf, $Q = 400$ Pf. Allein wegen der im 402 § angeführten Ursache läst man sich in die hier erforderliche etwas weitläuftige Rechnung nicht ein, sondern man berechnet zuerst die von dem verticalen Druck $M = 3015$ Pf. verursachte Friction, die also $= 1005$ Pf. gefunden wird. Hiezu rechnet man die von den beyden horizontalen Pressungen von 200 und 400 Pf. verursachte Friction nicht anders, als wenn beyde in einer Ebene lägen, wofür man also wohl nicht mehr, als $\frac{1}{3}(200 + 400)$ Pf. $= 200$ Pf. würde rechnen können. Herr Belidor aber rechnet 300 Pf. weil er hier seine im 400 §. angeführte Regel anwendet. Nach seiner Rechnung wird also $F = 1305$ Pf, und man erhält $a \cdot P = 1600$ Pf, $f \cdot F = 82$ Pf, also

$$\frac{aP - fF}{\frac{2}{3}r} = 759 \text{ Pf.}$$

Dies multiplicirt

mit $\frac{18}{19} \cdot \frac{c}{b} = \frac{27}{152}$

giebt 135 Pf.

Hievon abgez. $\frac{e}{r} \cdot \frac{1}{3}R = 10$ Pf.

läst $X = 125$ Pf.

Setzte man $F = 1205$ Pf, so wäre $fF = 75$ Pf. und man erhielte $X = 125\frac{1}{2}$ Pf, welches von dem vorigen Resultat sehr wenig unterschieden ist, so daß man den gesuchten Widerstand des Getreydes auf 125 Pf. und das Moment desselben auf 250 Pf. schätzen kann.

423 §.

423 §.

Der Druck, den das Getreyde vom Gewicht M des Läufers leidet, läst sich zwar nicht eigentlich bestimmen, indessen ist nicht unwahrscheinlich, daß das Getreyde von einem doppelt so schweren Läufer auch doppelt so viel Druck leide, und überhaupt, daß der Druck, den das Getreyde leidet, dem Gewicht des Läufers proportional sey, so daß man diesen Druck $= \frac{1}{n}M$ setzen kann. Uebrigens ist sonst in andern Fällen die Friction dem Druck proportional, daher kan man annehmen, daß auch in diesem Fall die Friction der Mühlsteine, die von dem dazwischen liegenden Getreyde herrührt, dem Druck $\frac{1}{n}M$, folglich auch dem Gewicht M selbst proportional, übrigens aber in der Entfernung von $\frac{2}{3}$ des Halbmessers des Läufers angebracht sey. Setzt man also diesen Widerstand $= \frac{1}{k}M$, so ist bey der vorhin berechneten Mühle $\frac{1}{k}M = 125$ Pf, wo $M =$ 4348 Pf. war, und man erhält $k = \frac{4348}{125} = 35$. Demnach kann man bey jeder andern Mühle annehmen, es sey der Widerstand, den das Getreyde dem Umlauf des Läufers entgegen setzt, so groß, als wenn in der Entfernung von $\frac{2}{3}$ seines Halbmessers eine Kraft der Bewegung entgegen drückte, die sich durch den 35sten Theil vom Gewicht des Läufers ausdrücken läst. Hr. Belidor versichert a. a. O. 654 §, daß diese Berechnungen mit der Wirkung einer solchen

Mühle vollkommen übereintreffen. Er ist davon durch verschiedene mit der grösten Sorgfalt angestellte Versuche überzeugt worden.

424 §.

Wenn verschiedene Läufer von ungleichem Gewicht und gleicher Grundfläche mit einerley Geschwindigkeit herumlaufen, so ist vermöge der Erfahrung die Menge des Mehls, was sie in gleicher Zeit mahlen, beynahe ihrem Gewicht proportional. Wenn aber die Läufer ungleich schnell laufen, so verhält sich die Menge des in gleicher Zeit gemahlnen Mehls ziemlich genau wie der nach dem 371 §. zu berechnende Effect der Maschine. Jedoch hat die Geschwindigkeit der Läufer ihre Grenzen, die sie nicht überschreiten darf, wofern sich das Mehl nicht erhitzen und darüber verderben soll (Belidor Archit. Hydraul. II Buch. I Cap. 636. 638 §.) Deswegen muß der Läufer nicht leicht mehr als 60 Umläufe in einer Minute vollenden. Wenn nun M und N die Gewichte, r und ϱ die Halbmesser, α und β die Umlaufs-Geschwindigkeiten verschiedener Läufer sind; so ist das Verhältniß des in gleicher Zeit gemahlnen Mehls $= \frac{1}{3}\frac{1}{5} M . \frac{2}{3} r . \alpha : \frac{1}{3}\frac{1}{5} N . \frac{2}{3} \varrho . \beta = M r \alpha : N \varrho \beta$. Weis man also wieviel Mehl eine Mühle von bekannter Einrichtung in gegebener Zeit mahlet, so läst sich diese Menge für jede andre Mühle finden.

Eine solche Mühle aber, wie die vorhin beschriebene und berechnete ist, die nemlich einen 4348 Pf. schweren Läufer von 6 Fuß im Durchmesser führet, der in einer Minute 53 mahl herum läuft, kann in 24 Stunden 120 *Septiers* Getreyde mahlen, jeden *Septier* zu 75 Pf. schwer gerechnet. Es muß aber der Läufer ganz neu geschärft

schärft und von besonderer Güte seyn, wie denn die härtesten und kleinlöcherigsten Steine die besten sind.

425 §.

Hand-Mühlen werden diejenigen genannt, welche von Menschen getrieben werden, und Roß-Mühlen solche, die man durch Pferde treibt. Sie werden am meisten in Vestungen gebraucht, um die Besatzung zur Zeit einer Belagerung mit Mehl zu unterhalten. Eine der einfachsten Einrichtungen einer Handmühle ist diejenige, welche die 211 Fig. 211 vorstellt. Die Kurbel A wird von zwey Personen Fig. gedrehet, an ihrer Axe befindet sich das Kammrad B, welches den Trilling C und mit demselben den Läufer D treibt. Die Kurbel hat 12 Zoll Bug, und das Kammrad ebenfalls 12 Zoll im Halbmesser, und ist mit 12 Kämmen versehen. Der Trilling hat sechs Zoll im Halbmesser und sechs Triebstecken, so daß der Läufer zweymahl in der Zeit umläuft da die Kurbel einmahl herum kommt. Weil die an der Kurbel arbeitenden Leute nicht wohl beständig mit gleicher Stärke drehen können, zumahl auch die Friction für jede Stellung der Kurbel anders ist (399 §), so bringt man an ihrer Axe die Schwungflügel K, L, und eben dergleichen Schwungflügel H, I, auch am Mühleisen an, die aus zweyen hölzernen kreuzweiß übereinander gelegten Latten, jede von 6 Fuß Länge zusammengesetzt, und an ihren Enden mit bleyernen Platten belegt werden. Hiedurch wird die Bewegung desto gleichförmiger erhalten. Des Läufers Durchmesser ist $3\frac{1}{2}$ Fuß, und seine Dicke am äussern Umfang $6\frac{1}{4}$ Zoll im Mittel aber nur $5\frac{1}{2}$ Zoll, weil seine conische Höhlung sich auf 9 Linien in die Tiefe

erstreckt. Weil nun der Inhalt dieses Kegels einem Cylinder von eben der Grundfläche in der Höhe von 3 Linien gleich ist, so kann man davor 3 Linien von der ganzen Dicke abrechnen, und den Läufer als einen Cylinder von 6 Zoll Höhe betrachten; auf solche Art findet man seinen Inhalt $= \frac{3}{4}\frac{5}{5}\frac{5}{2}.42^2.6 =$ 8316 Cub. Zoll. Die Hölung des Läufer-Auges, worin das Mühleisen steckt, hat im Durchmesser 5 Zoll, und ist ohngefehr $5\frac{1}{2}$ Zoll hoch, also ihr Inhalt 107 Cub. Zoll, welche von 8316 Cub. Zoll abgezogen 8209 Cub. Zoll für den eigentlichen Inhalt des Läufers geben. Nun wiegt 1 Cub. Zoll $\frac{1}{1}\frac{1}{7}\frac{0}{2}\frac{}{8}$ Pf, also ist das Gewicht des Läufers $\frac{1}{1}\frac{1}{7}\frac{0}{2}\frac{}{8}.8209 = 522$ Pf. Nach gemachten Ueberschlag wird man eben so für das Gewicht des Mühleisens, des Trillings, und der am Mühleisen befindlichen Schwungflügel, etwa 178 Pf. finden, daß also das ganze Gewicht, womit hier der Steg belästiget ist, 700 Pf. ausmacht. Der Durchmesser des Mühleisen-Zapfens ist ohngefehr 4 Linien, und die Dicke der Kurbelzapfen 8 Linien.

426 §.

Es beträgt demnach der Widerstand des Getreydes $\frac{1}{3}\frac{}{}700$ Pf. $=$ 20 Pf. und desselben statisches Moment $\frac{2}{3}.21.20$ Pf. $=$ 280 Pf. Die an der Kurbel angebrachte Kraft sey $=$ V, so ist ihr Moment $= 6.V$. Da nun dies $=$ 280 Pf. seyn muß, so erhält man $V = \frac{1}{6}280$ Pf. $= 46\frac{2}{3}$ Pf. die Friction beyseit gesetzt. Um nun zu finden, wie groß diese Kraft wegen der Friction seyn muß, darf man nur erwegen, daß statt des Wasserrades im 421 § hier die Kurbel, und statt der Mühlwellen-Zapfen hier die Kurbelzapfen in Betracht kommen; so läst sich

die

die daselbst gefundene Gleichung auch hier gebrauchen, P zu berechnen, d. i. diejenige Kraft, welche dem Widerstand des Getreydes nebst der übrigen Friction zusammen die Wage hält. Man setze demnach in der Gleichung des 421 §

$a = b =$ 12 Zoll	$r =$ 21 Zoll
$c =$ 6 Zoll	R = 700 Pf.
$e = \frac{1}{6}$ Zoll	X = 20 Pf.
$f = \frac{1}{3}$ Zoll	

so erhält man

$$aP - fF = \frac{3}{1}\frac{8}{8}\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}700 + 14\cdot 20\right) = 646 \text{ Pf},$$

also $P - \frac{f.F}{a} = 53\frac{5}{6}$, wo $\frac{f.F}{a}$ derjenige Theil ist, der wegen der Friction der Kurbel-Zapfen erfordert wird. Nimmt man nun an, um F zu finden, daß an der Kurbel eine Kraft von $53\frac{5}{6}$ oder 54 Pf. angebracht sey, so ist der Widerstand der Triebstecken gegen die Kämme eben so groß, und wenn die Kurbel vertical herab hängt, die Kraft aber horizontal zieht, so drückt der Widerstand mit ihr parallel. Man kann also wie im 422 § annehmen, beyde Zapfen zusammen werden nach horizontaler Richtung mit $2 \times 54 = 108$ Pf, vertical aber mit dem Gewicht der Kurbel nebst des zugehörigen Kammrades und der Schwungflügel, welches 200 waren, gedruckt. Der mittlere Druck ist $= \sqrt{(108^2 + 200^2)} = 227$ Pf. Rechnet man hievon nach Belidors Regel die Hälfte, nemlich 113 Pf. für F, so wird

$$\frac{f.F}{a} = \frac{\frac{1}{3}.113}{12} = 3 \text{ Pf}, \text{ also } P = 54 + 3 =$$

57 Pf. Arbeiten nun zwey Personen an der Kurbel, so muß jede etwa 28 bis 29 Pf. Kraft anwenden,

welches nach dem 395 § ohngefehr diejenige Kraft ist, welche erfordert wird, um den meisten Vortheil zu erhalten, und wobey die angegriffene Kurbelstange A mit einer Geschwindigkeit von 2 Fuß in einer Secunde umlaufen kann. Weil nun der Halbmesser des Kreises, den sie durchläuft, 1 Fuß ist, so ist der Umfang 6,3 Fuß, daß also die Kurbel etwa in 3 Secunden einmahl und in einer Minute 20 mahl umliefe. Nach Hr. Belidor (a.a.O. 680 §) können die Arbeiter die Kurbel wohl 30 mahl in einer Minute umdrehen, daß also der Läufer alle Secunden einmahl umliefe. Er hat gesehen, daß eine Kurbel, die 16 Zoll Bug hatte, von den dabey bestellten Arbeitern in einer Minute 55 mahl umgedrehet worden, ungeachtet jede Person $35\frac{1}{2}$ Pf. Kraft anwenden müssen: doch gestehet er, daß diese Arbeit ein wenig zu stark sey. Nimmt man an, daß der Läufer 60 Umläufe in einer Minute zurück lege, so findet man nach dem 424 §, wie viel Mehl die Mühle in 24 Stunden mahlen könne vermittelst der Proportion

$$\text{\textbigcircle}\text{\textbigcircle}48 \times \text{\textbigcircle}24 \times 53 : 700 \times 14 \times \text{\textbigcircle}\text{\textbigcircle} = x20 : \text{ges. Zahl}$$

$$1087 \quad \text{\textbigcircle} \qquad 7 \quad 15 \quad 1$$

$$\text{welche} = \frac{700 \times 7 \times 15 \times 10}{1087 \times 53} = 12\frac{7}{10} \text{ Septiers}$$

gefunden wird.

427 §.

Um nun ein Beyspiel zu geben, wie man sich etwa verhalten müsse, wenn man einen Entwurf von einer Maschine machen will, kann die Einrichtung einer Roßmühle dienen. Die erste zu beobachtende Regel ist, daß man die Maschine aus so wenigen Theilen zusammen setze, als sich will thun lassen. Um indessen dem Läufer eine hinlänglich schnelle Bewegung

zu verschaffen, damit er wenigstens vierzig mahl in einer Minute umlaufe, muß wenigstens ein Rad und Getriebe gebraucht werden. Bey der vorhin beschriebenen Handmühle ward ein Kammrad gebraucht, den Trilling am vertical stehenden Mühleisen zu drehen. Weil aber ein Pferd am füglichsten eine vertical stehende Welle AB vermittelst eines an derselben horizontal befestigten Arms CD drehet, wenn es bey D angespannt ist, und sodann im Kreise herum läuft; so kann man hier an der verticalen Welle AB ein Stern-Rad EF anbringen, das in den Trilling G greift, und vermittelst desselben den Läufer H herum treibt. Um nun bey dieser Maschine die vortheilhafteste Einrichtung zu treffen, muß das Pferd etwa 4 Fuß in einer Secunde laufen, da es dann eine Kraft von etwa 186 Pf. anwendet, so daß der Effect der Maschine auf 746 Pf. betragen kann, wenn die Einrichtung gehörig gemacht wird (395 §). 212 Fig.

428 §.

Der Arm CD, an dessen Ende das Pferd angespannt wird, muß nicht zu lang seyn, weil sonst viele Zeit verlaufen muß, bevor das Pferd einen Umlauf endiget: man muß ihn aber auch nicht zu kurz machen, damit sich das Pferd bequem wenden kann. Nimmt man $CD = r = 12$ Fuß, so wird im 384 §

$$\mu = \frac{4}{24\pi} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{22}, \text{ also etwa } \frac{1}{22},$$

so daß das Pferd in 22 Secunden ohngefehr einmahl umläuft, welches für die Stunde 164 Umläufe giebt, wofür man, um nicht zu viel zu rechnen, 160 Umläufe nehmen kann, daß also auf eine Secunde nur $3\frac{1}{3}$ Fuß kommen. Nun muß der Läufer

in

in einer Minute wenigstens 40mahl, also in einer Secunde $\frac{2}{3}$mahl umlaufen. Dies giebt $\frac{\nu}{\mu} = \frac{44}{3}$ ohngefehr $= 15$. Nimmt man statt dessen 16, so bekömmt der Läufer noch etwas mehr Schnelligkeit. Man kann demnach dem Sternrade 16mahl mehr Zähne geben, als das Getriebe Stecken hat. Giebt man dem letztern 7 Stecken, so bekömmt ersteres 112 Zähne. Hiedurch wäre nun in der Gleichung $\nu = \frac{\frac{2}{27} ph}{\pi . q . Q}$ alles bis auf das Moment $q . Q$ bestimmt, wobey aber noch die Friction in Betracht zu ziehen ist. Dies Moment begreift nicht allein den Widerstand des Getreydes, sondern zugleich die am Zapfen des Mühl-Eisens, nebst der zwischen Rad und Getriebe vorfallenden Friction; wozu noch die an den Zapfen der Welle AB vorfallende Friction besonders gerechnet werden muß (382 §).

429 §.

Läst man die Buchstaben a, b, c, u. s. f. eben das bedeuten, was sie im 421 § anzeigten, und verstehet durch die Mühlwelle nun AB, also durch Ff nun die an den Zapfen von AB vorfallende Friction; so kann man die dortige Gleichung auch hier brauchen, um das Gewicht des Läufers zu finden, wenn sein Halbmesser r willkührlich angenommen wird. Es war im 421 § $X = \frac{18}{19} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{aP - Ff}{\frac{2}{3}R} - \frac{e}{r} \cdot \frac{1}{3}R$, und es bedeutete R das Gewicht des Läufers mit allem Zubehör, X aber den Widerstand des Getreydes. Nun weiß man schon, daß $X = \frac{1}{35}R$ sey.

Wenn

Wenn man demnach dies statt X, überdem $k=35$, und $\frac{19}{18}=\frac{m}{n}$ setzt, so erhält man

$$\frac{1}{h}R=\frac{n}{m}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{aP-Ff}{\frac{2}{3}R}-\frac{e}{r}\cdot\frac{1}{3}R,$$

woraus R gefunden werden kann. Die Gleichung giebt nemlich

$$\left(\frac{e}{3r}+\frac{1}{h}\right)\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{2}{3}r.R=aP-fF.$$

Es ist hier aber die Friction F an den Zapfen der Welle AB gedoppelt, die eine entspringt von dem Gewicht der Welle M am untern Zapfen, und ihr Moment ist $=\frac{2}{3}f.\frac{1}{3}M$. Die andre entspringt von dem bey D angebrachten Druck der Kraft P, und dem Gegendruck des Trillings gegen die Zähne des Sternrades. Dieser letztere Druck ist

$=\left(\frac{\frac{2}{3}e}{3}+\frac{\frac{2}{3}r}{h}\right)\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{R}{c}$, und Belidors Regel (400 §) giebt für diesen Theil der Friction das Moment $\left(\frac{\frac{2}{3}e}{3}+\frac{\frac{2}{3}r}{h}\right)\cdot\frac{m}{2n}\cdot\frac{f}{c}.R+\frac{1}{2}fP$.

Setzt man diesen Theil mit dem vorigen $\frac{2}{3}f.\frac{1}{3}M$ zusammen, und schreibt die Summe statt fF, so erhält man

$$\left(\frac{\frac{2}{3}e}{3}+\frac{\frac{2}{3}r}{h}\right)\frac{m}{n}\cdot\frac{b}{c}R=aP$$

$$-\left(\frac{\frac{2}{3}e}{3}+\frac{\frac{2}{3}r}{h}\right)\frac{m}{2n}\cdot\frac{f}{c}R-\frac{1}{2}f.P-\frac{2}{3}f.\frac{1}{3}M,$$

und daraus folgt

$$R = \frac{(a - \frac{1}{2}t)P - \frac{2}{3}f.\frac{1}{3}M}{\frac{m}{nc}\left(\frac{\frac{2}{3}e}{3} + \frac{\frac{2}{3}r}{h}\right)(b + \frac{1}{2}f)}.$$

430 §.

Um nun dies alles in Zahlen zu berechnen, muß man noch wissen, wie groß b, c, e, f, M, zu rechnen sind. Diese Grössen richten sich alle nach der Stärke der Maschine, und man kann den vorläufigen Ueberschlag ohngefehr nach dem Effect machen, den die Maschine leisten soll. Wenn der Halbmesser des Trillings $c = 6$ Zoll ist, so muß der Halbmesser des Stern-Rades 16mahl grösser, also $b = 8$ Fuß seyn. Uebrigens kann $e = 3$ Lin. und $f = 9$ Lin. wie im 421 §, bleiben. Die Mühlwelle AB wird 16 bis 18 Zoll dick gemacht, und muß 7 bis 8 Fuß hoch seyn. Ihr Gewicht mit dem Stern-Rade zusammen wird also auf 1500 Pfund betragen. Der Halbmesser des Läufers r sey $= 5$ Fuß, und $P =$ 180 Pfund, wie im 428 § angenommen ist. Ueberdem war $a = 12$ Fuß $= 144$ Zoll, $f = \frac{3}{4}$ Zoll, also $a - \frac{1}{2}f = 143\frac{3}{8}$ Zoll, und $\frac{2}{3}f = \frac{1}{2}$ Zoll. Dies giebt $(a - \frac{1}{2}f)P - \frac{2}{3}f.\frac{1}{3}M = 25602$ Pf. Ferner wird

$\frac{\frac{2}{3}e}{3} + \frac{\frac{2}{3}r}{h} = (\frac{1}{18} + \frac{2}{360})$ Zoll $= \frac{396}{3600}$; $\frac{m}{nc} = \frac{19}{18 \times 6} = \frac{19}{108}$, und $b + \frac{1}{2}f = 96{,}75$ Zoll. Demnach wird $R = \frac{25602}{10{,}67} = 2400$ Pf. Dies wäre nun das Gewicht des Läufers samt dem Mühl-Eisen

sen und Trilling. Der beyden letzten Stücke Gewicht kann man auf 200 Pf. schätzen, so daß 2200 Pfund für das Gewicht des Läufers übrig bleiben. Daraus ergiebt sich der Inhalt $= \frac{2200}{110} \times 1728 =$ 34560 Cub. Zoll; und weil die Grundfläche $= \pi rr =$ 2828 Quadratzoll beträgt, so wird die Höhe oder Dicke des Läufers $= \frac{34560}{2828} =$ 12 Zoll 3 Linien. Wegen der kegelförmigen Höhlung des Läufers, die ohngefehr 10 Linien tief seyn muß, addirt man ohngefehr noch 3 Linien, um die reducirte Dicke zu haben, und wenn man alles genau berechnen will, so muß wegen des Läufer-Auges, wodurch das Mühl-Eisen gehet, der gefundene Inhalt des Läufers eigentlich durch $\pi(rr - \varrho\varrho)$ dividirt werden, um die Dicke zu finden, wenn ϱ der Halbmesser der Grundfläche des Läufer-Auges ist. Um endlich zu finden, wie viel die Mühle in 24 Stunden mahlen könne, schliest man nach dem 426 §,

4 ℬ 4 8 × ℓ 4 × 53 : ℓ 4 0 0 × 20 × 42 = x ℓ 0 : ges. Zahl,

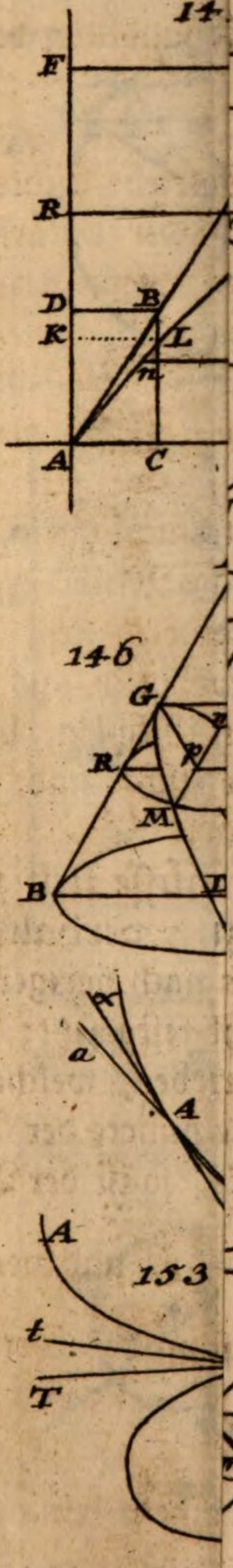
1387 1 3

und man findet $\frac{100 \times 20 \times 42 \times 30}{1387 \times 53} = 44$ Septiers. Bey der vorhin beschriebenen Handmühle konnten 2 Personen in eben der Zeit $12\frac{2}{3}$ Septiers mahlen, also werden ihrer 7 etwa 44 Septiers mahlen, so daß bey der Roßmühle mit einem Pferde so viel ausgerichtet wird, als sonst 7 Menschen ausrichten können.

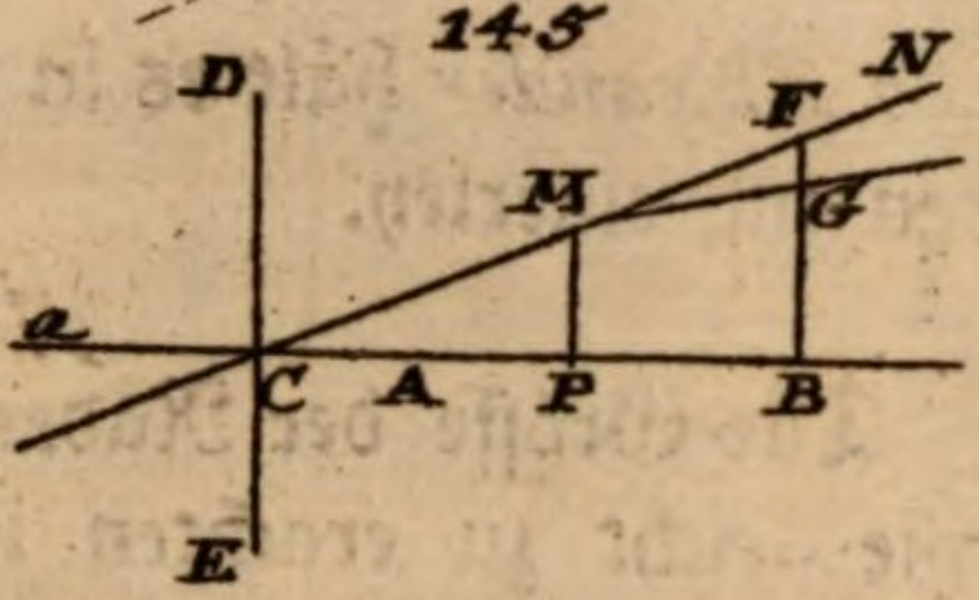
Mehrere Lehren vom Maschinen-Wesen sollen im folgenden Theil dieses Lehrbegrifs, in der Hydraulik und Aeromechanik, beygebracht werden.

Ende
des Vierten Theils.

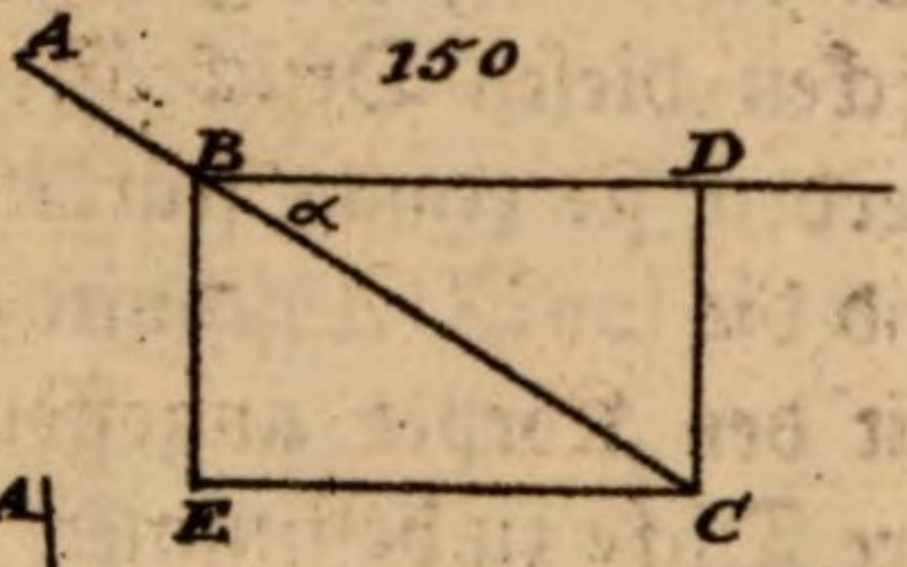
14.



145

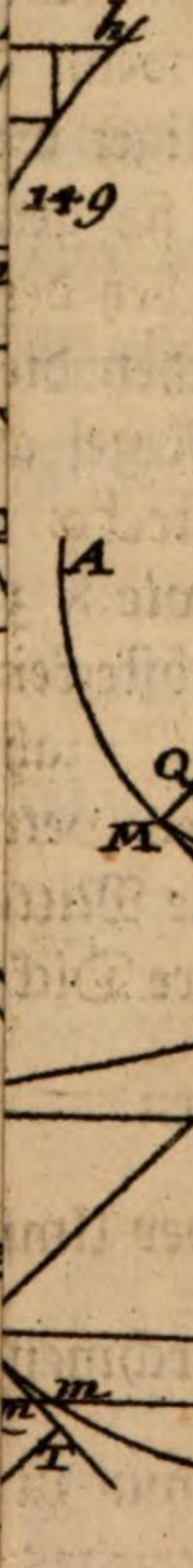


150

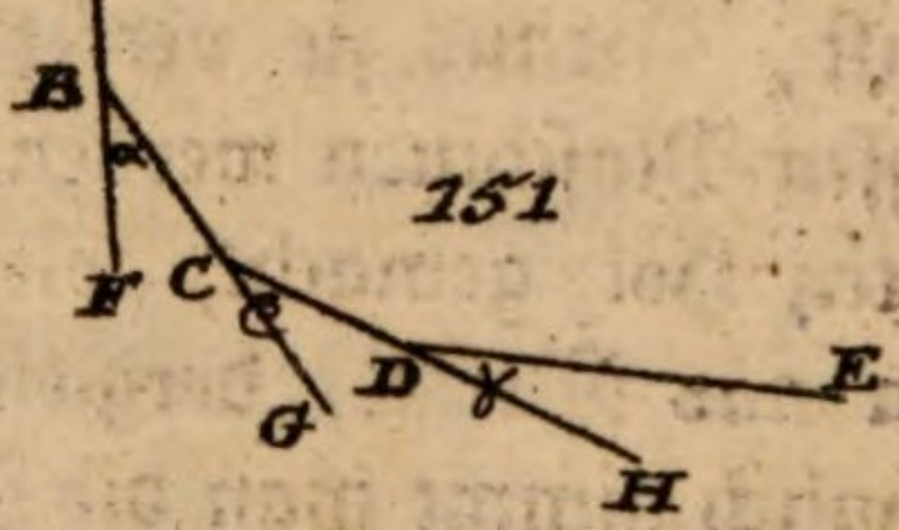


146

149

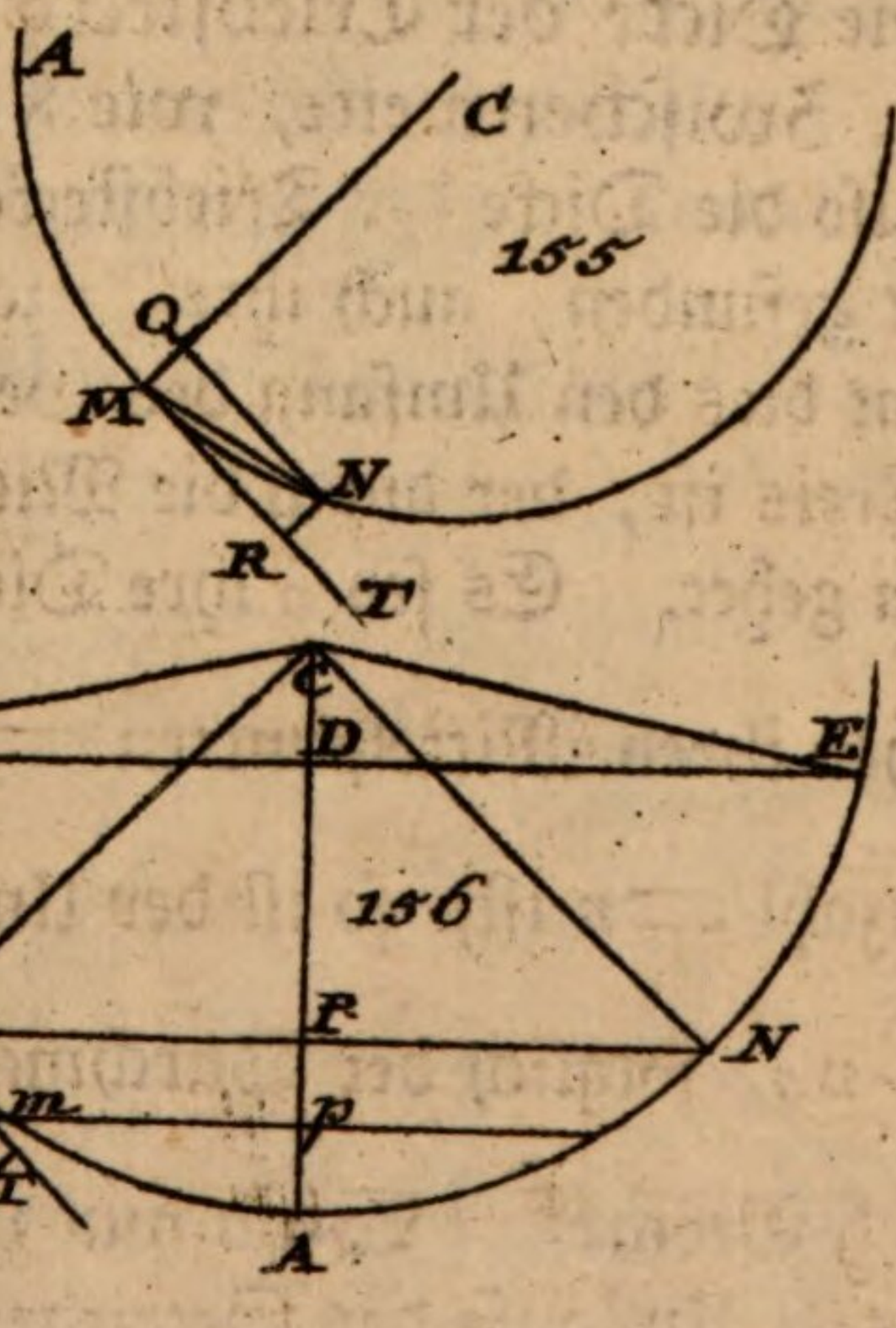


151

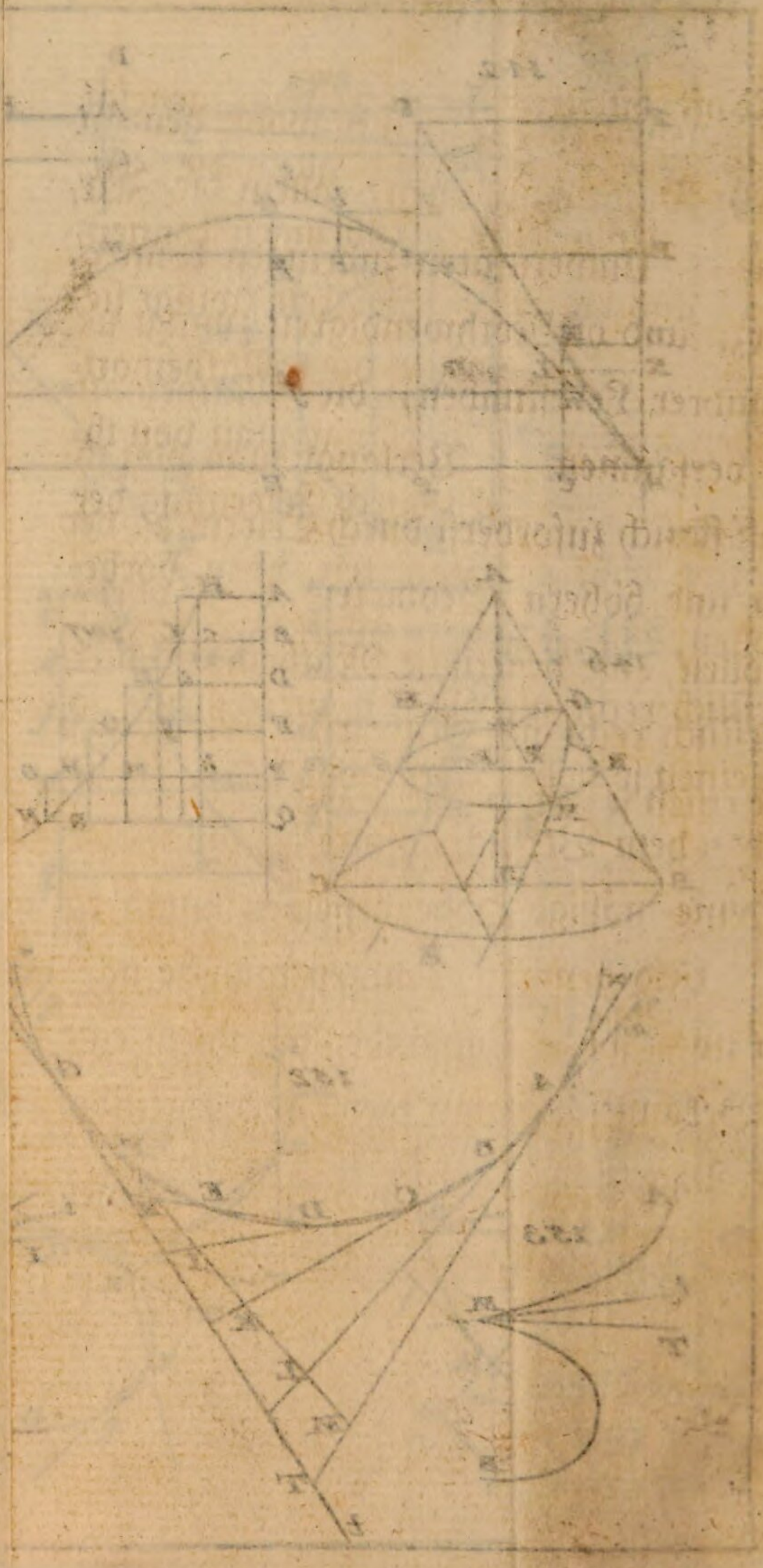


153

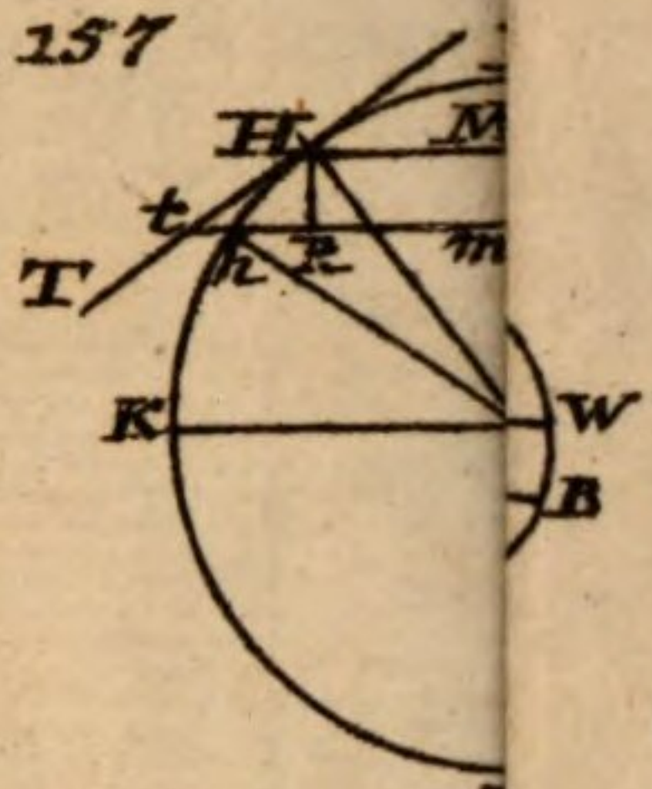
155



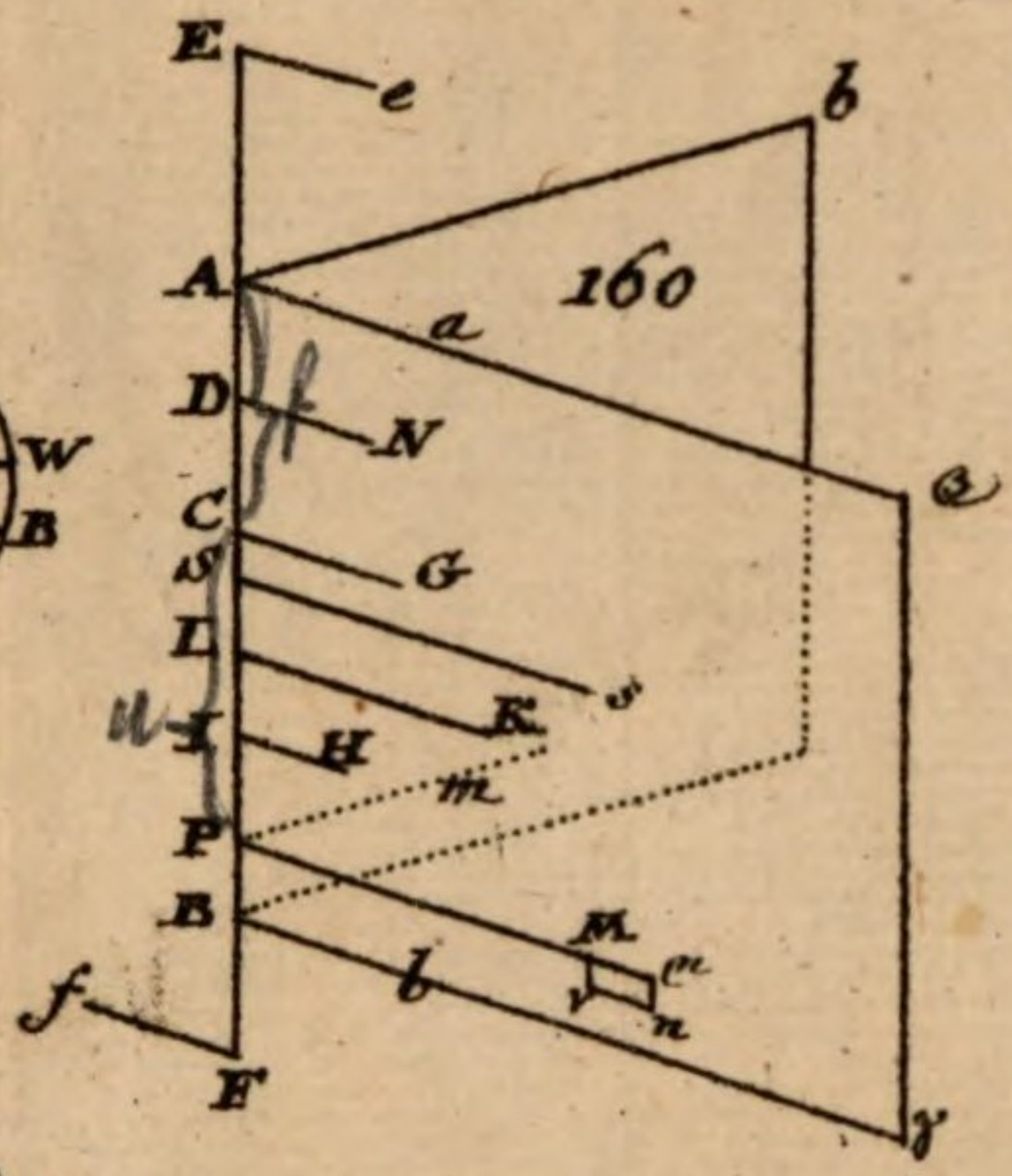
156



157

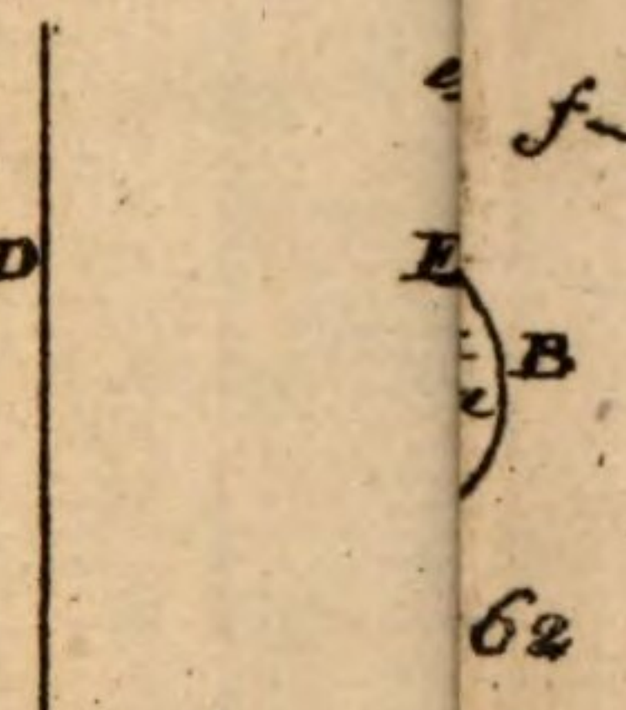


160

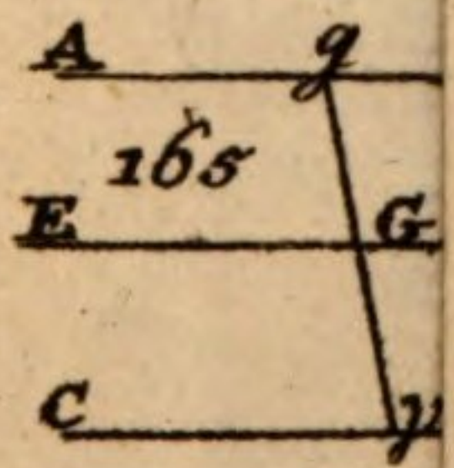


161

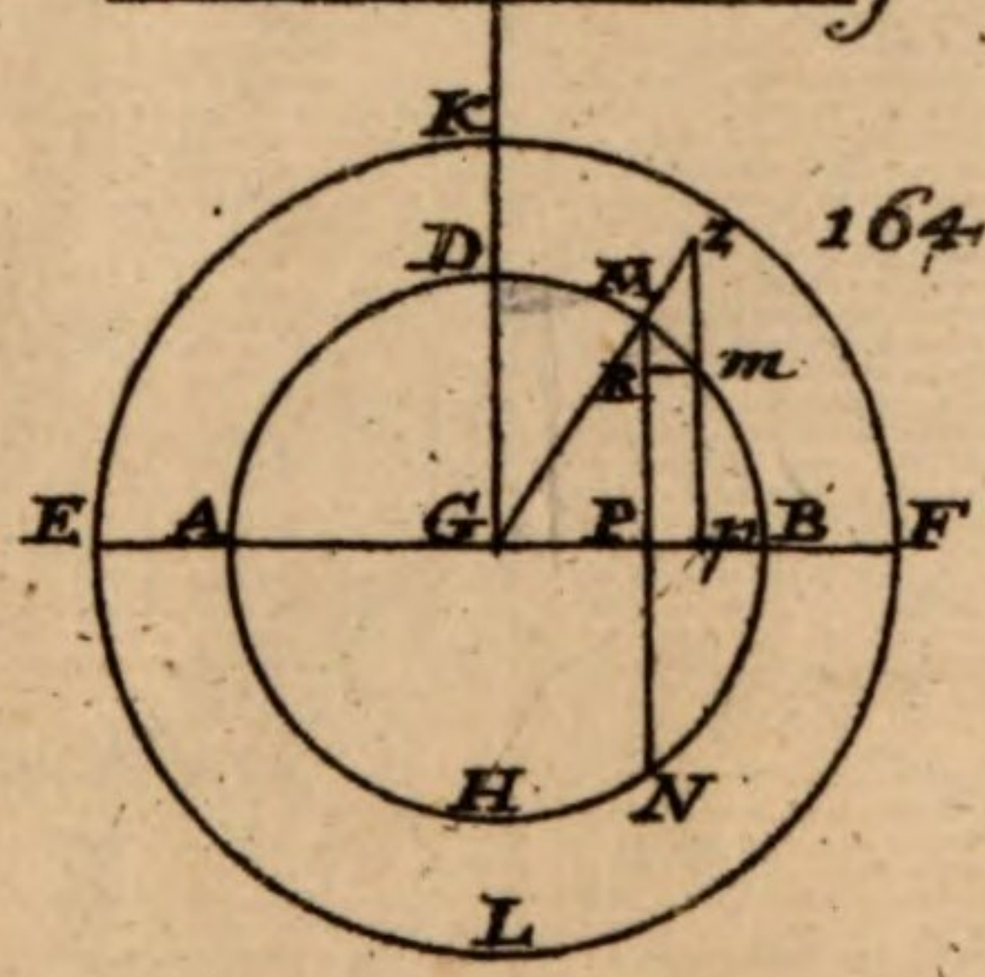
162



163

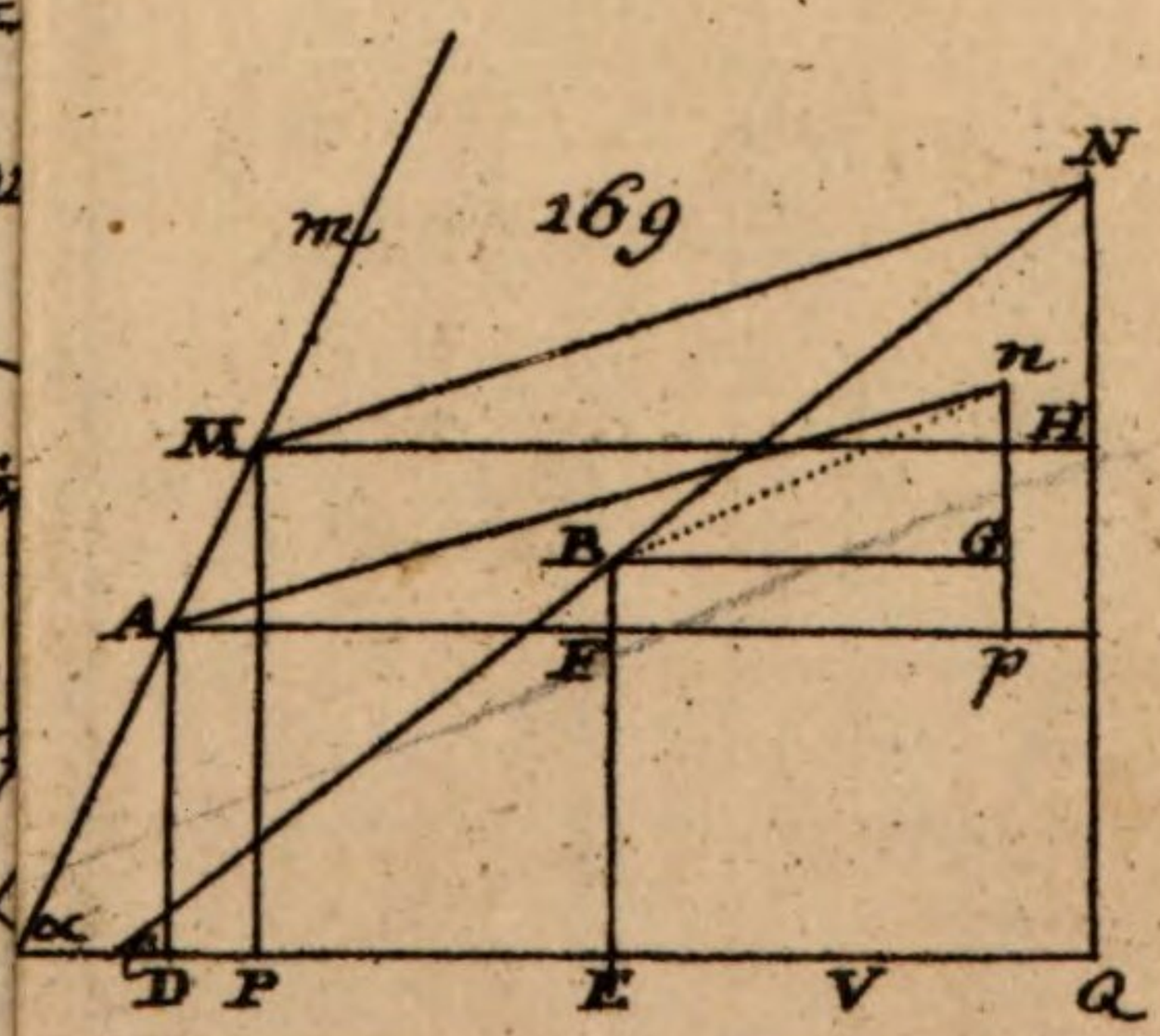


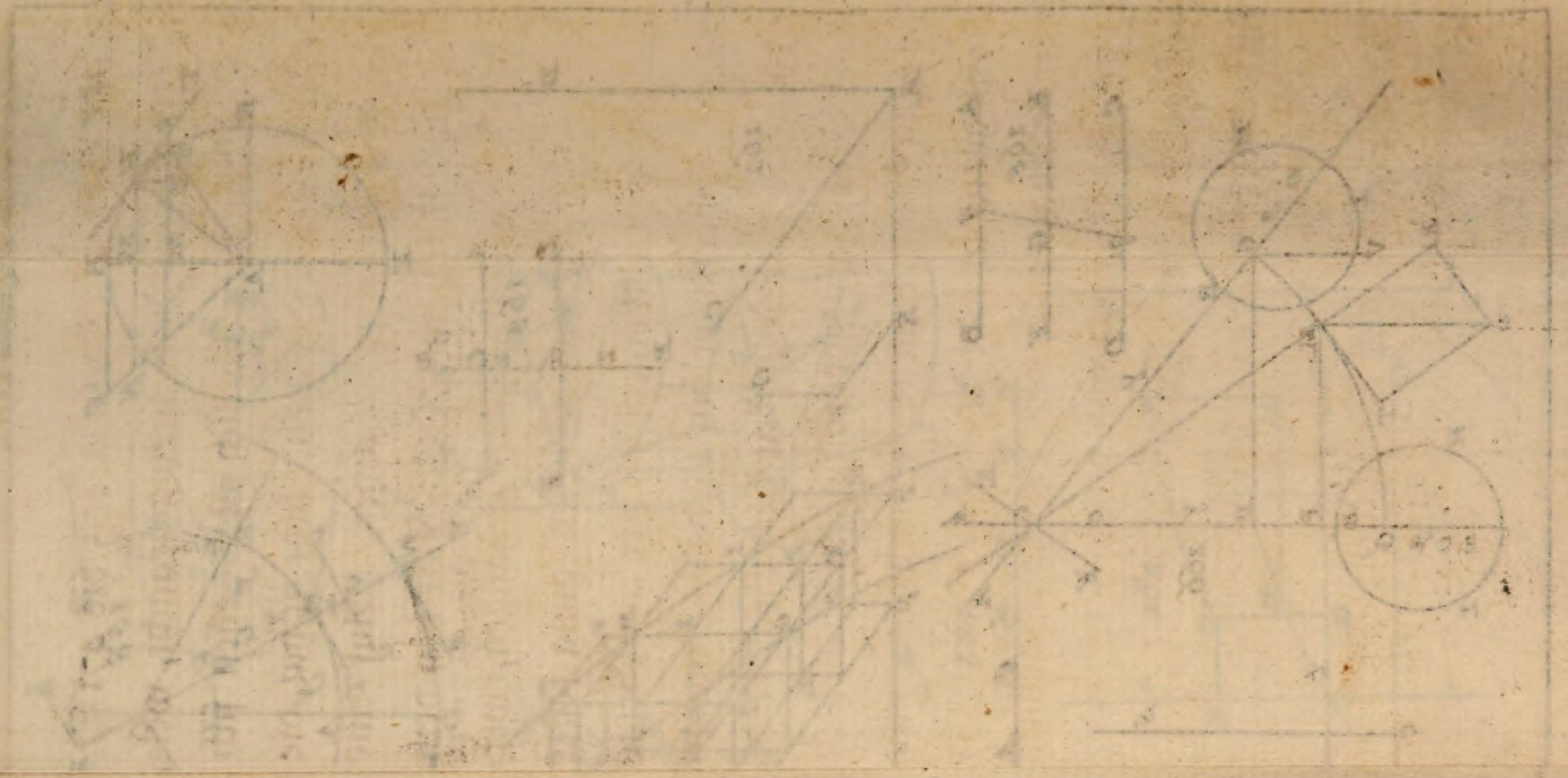
164



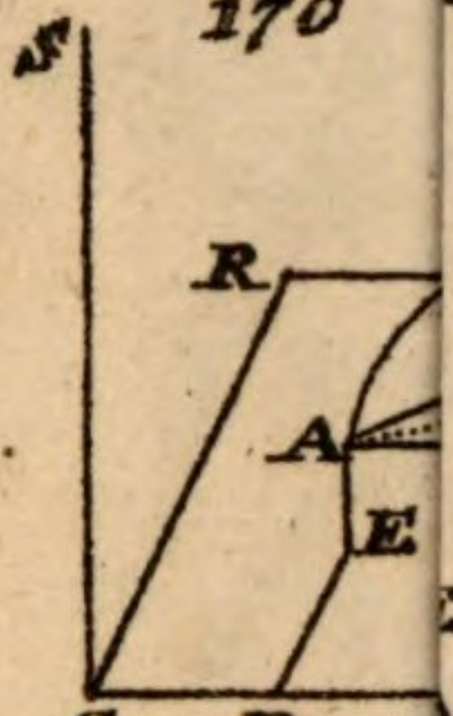
165

169

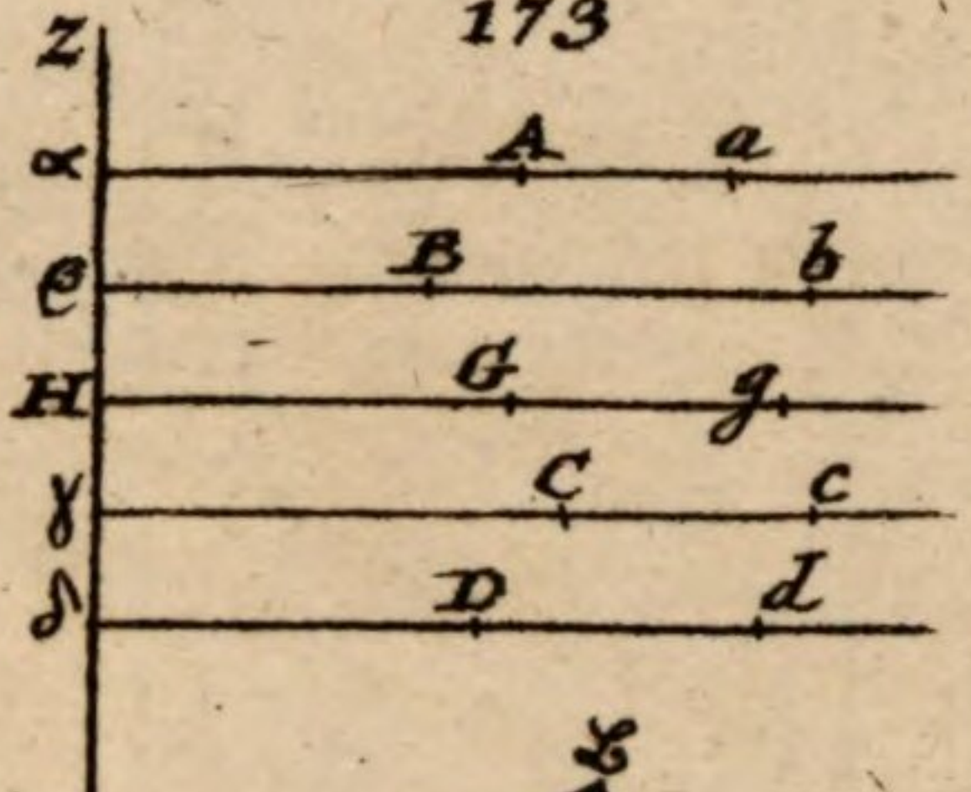




170

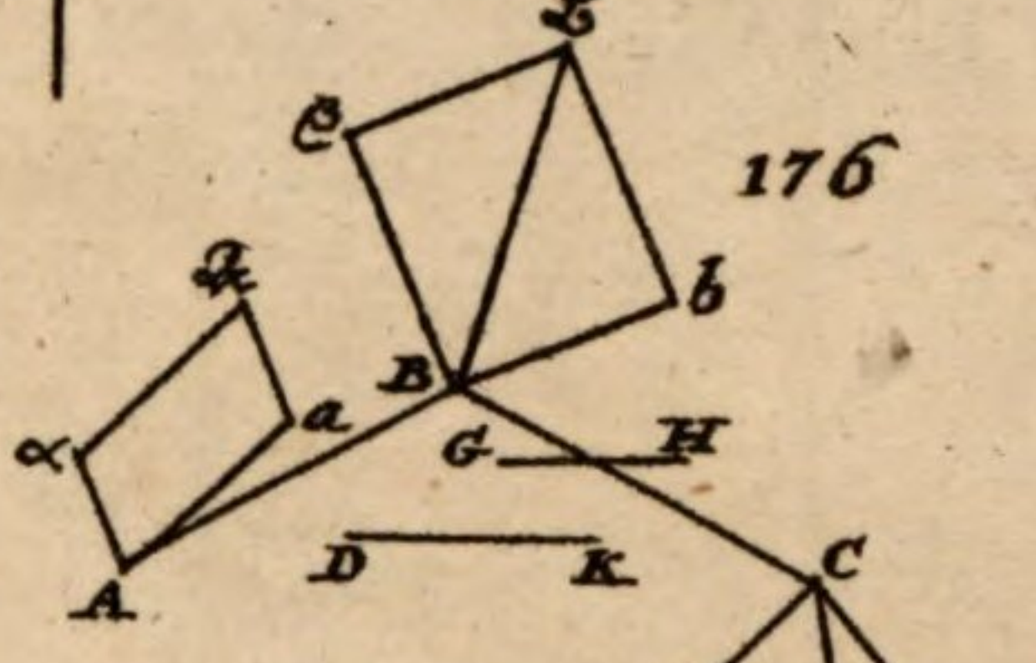


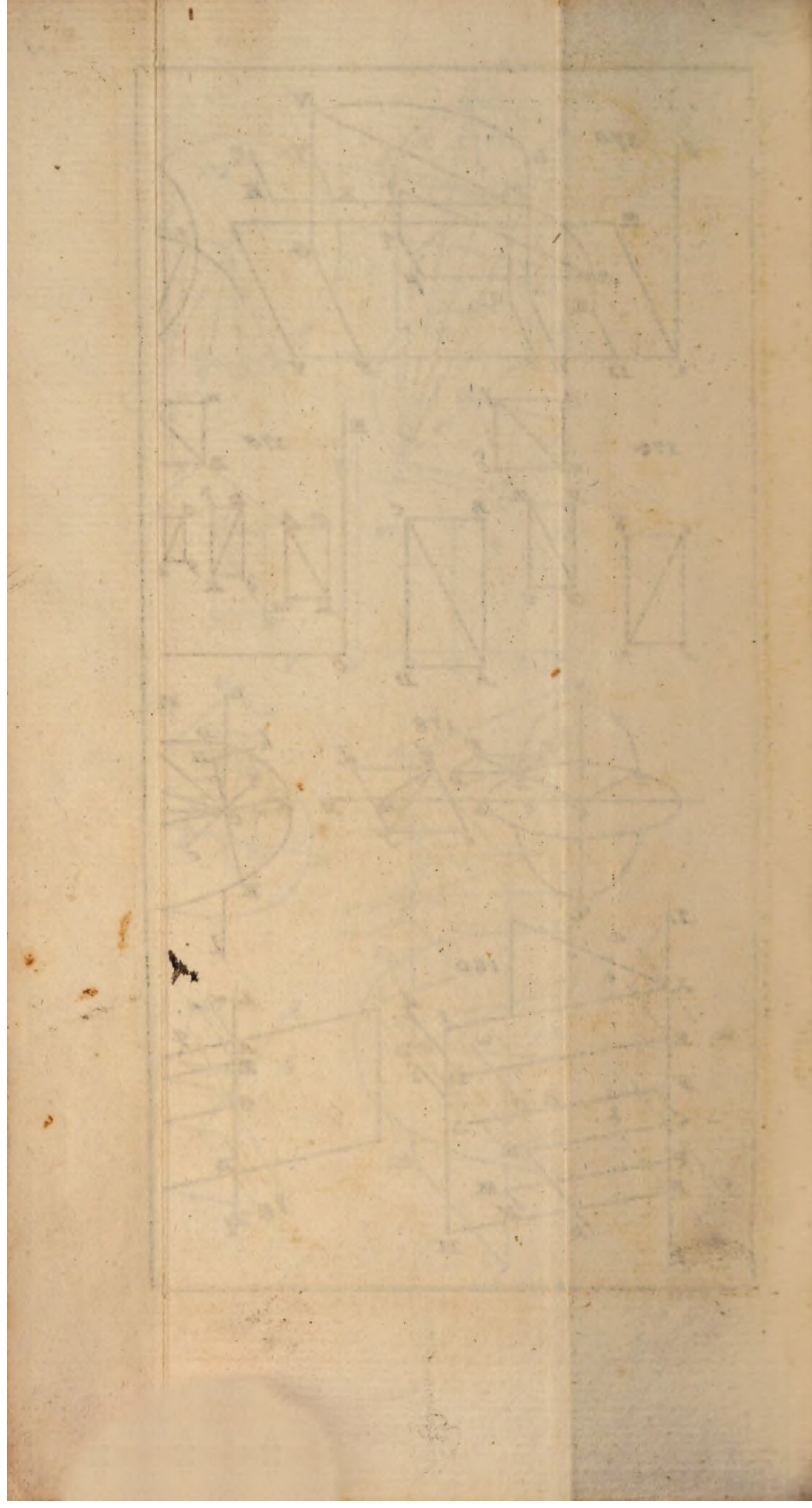
173



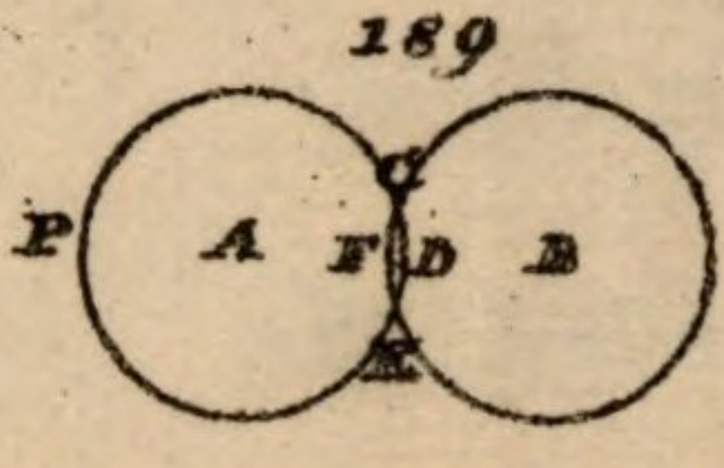
174

176

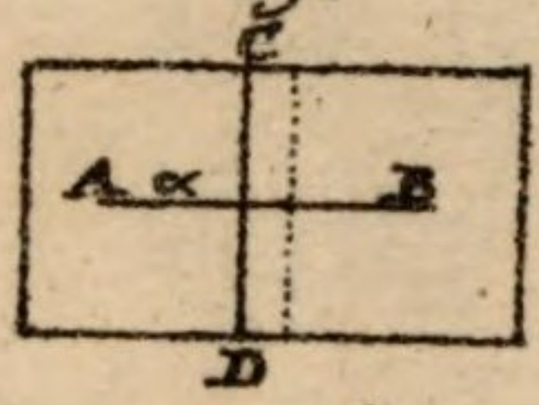


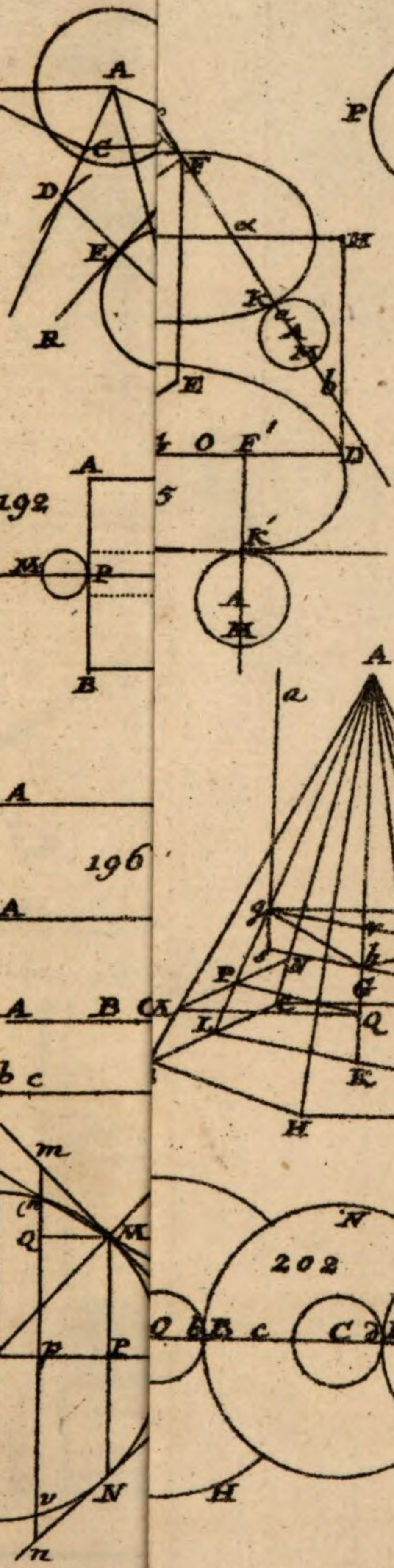


189

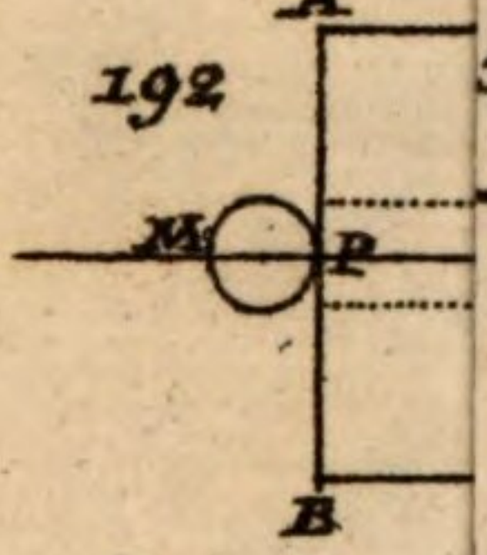


190

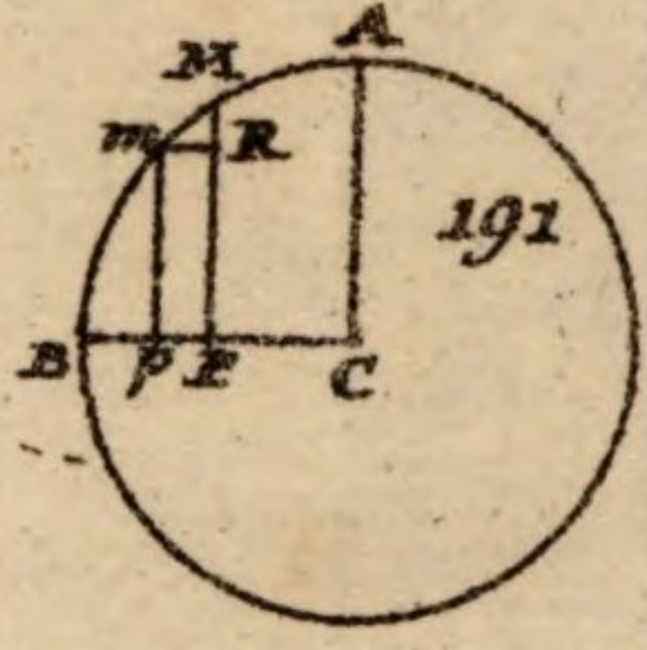




192

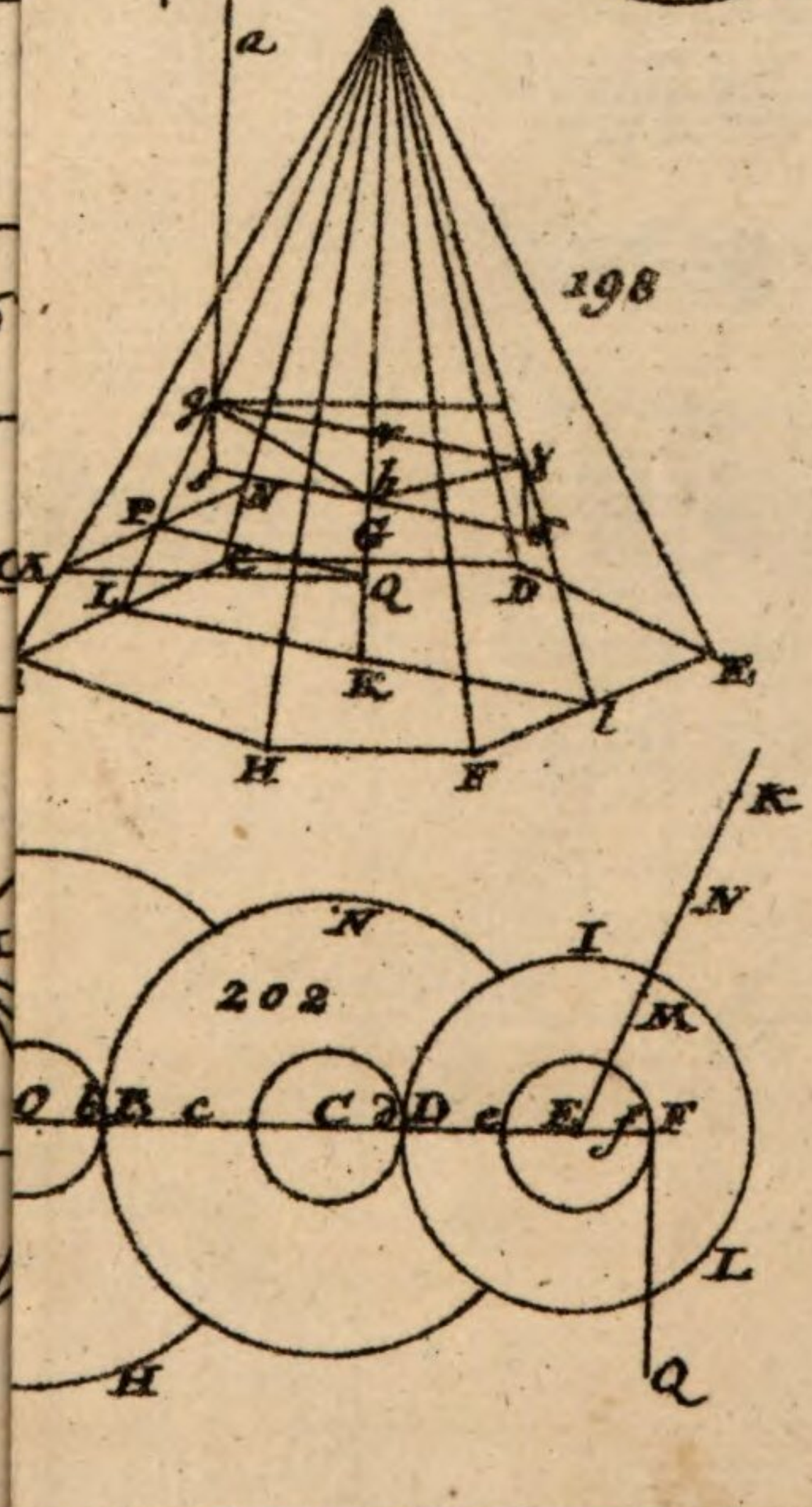


191

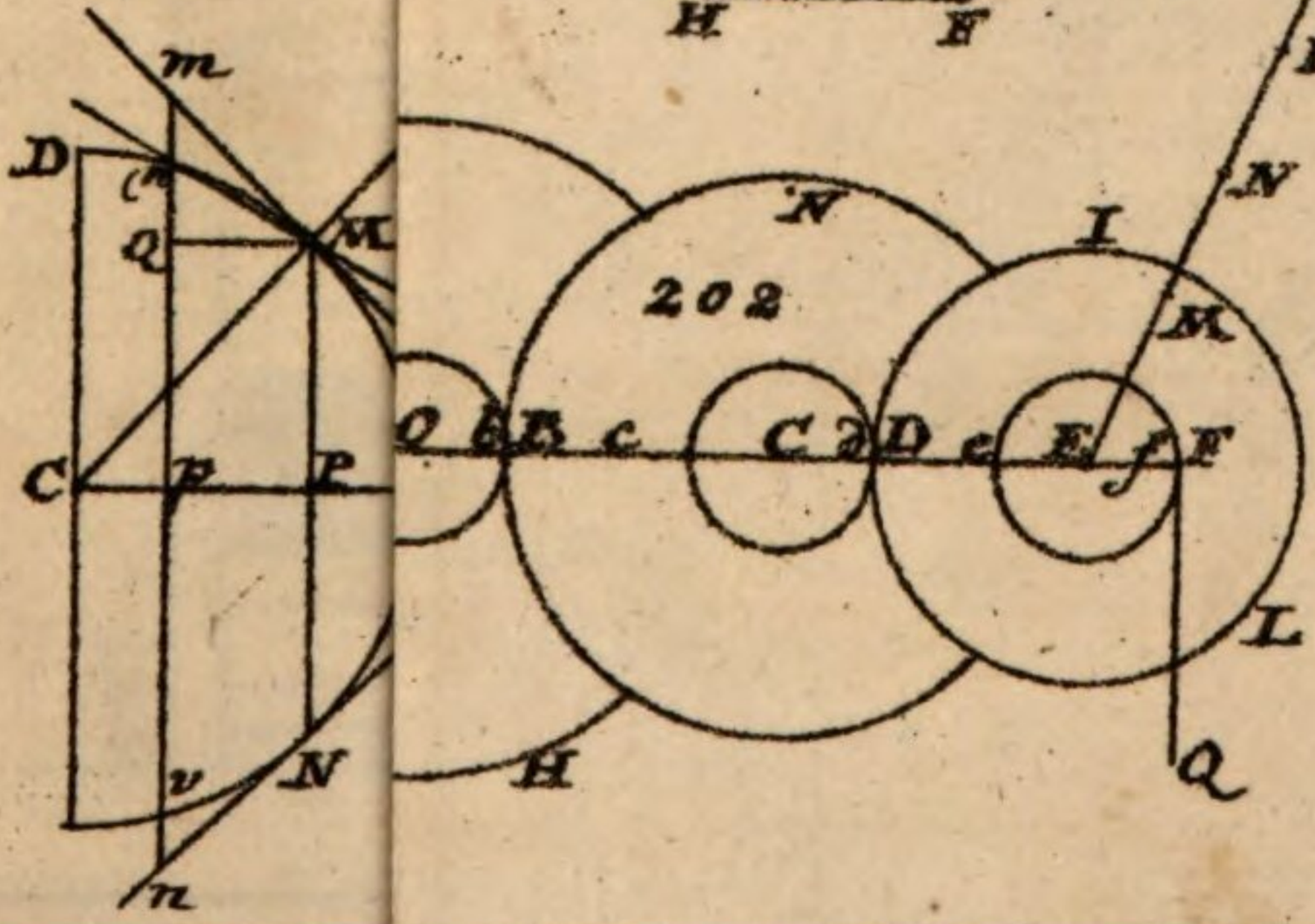


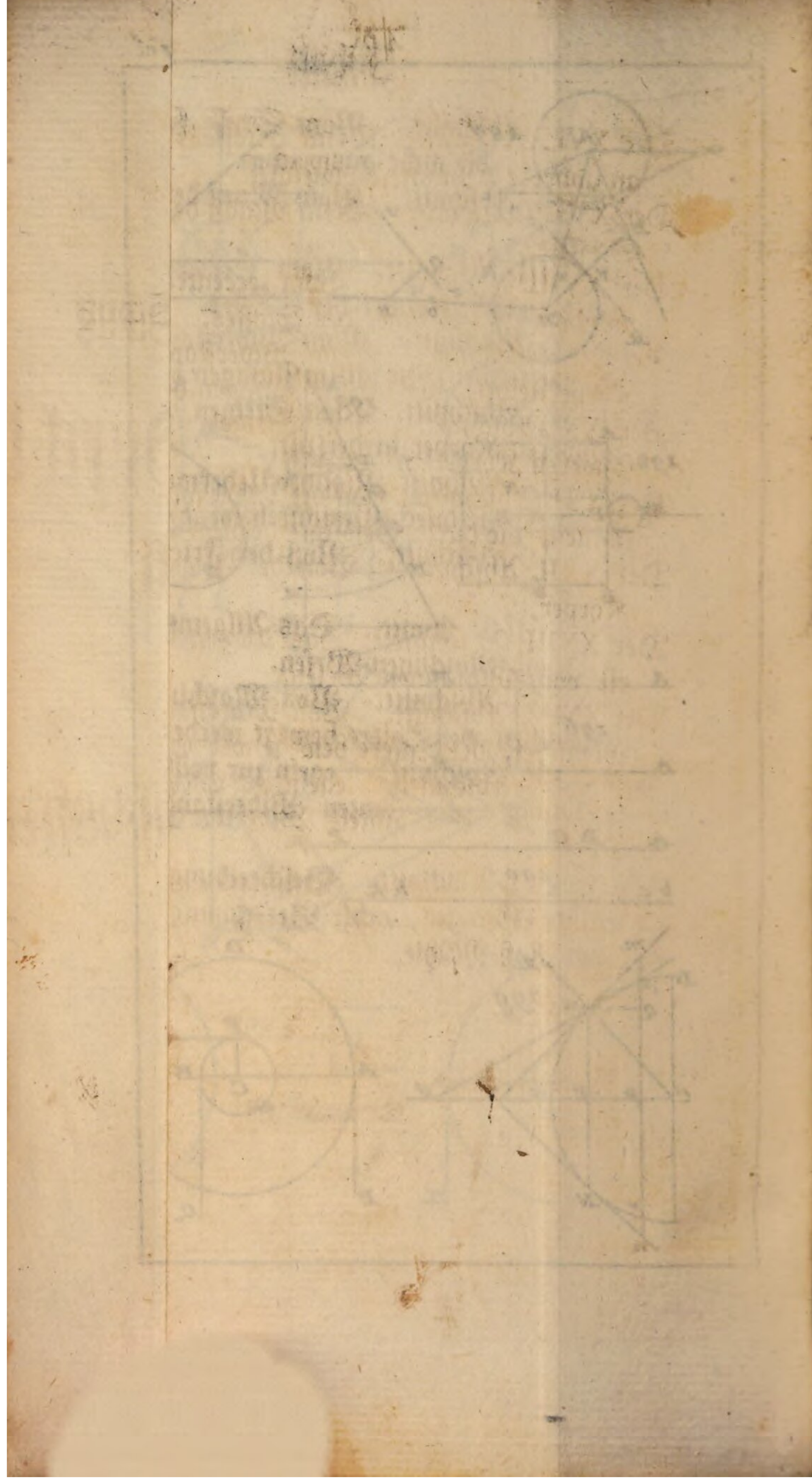
196

198



202





203

205

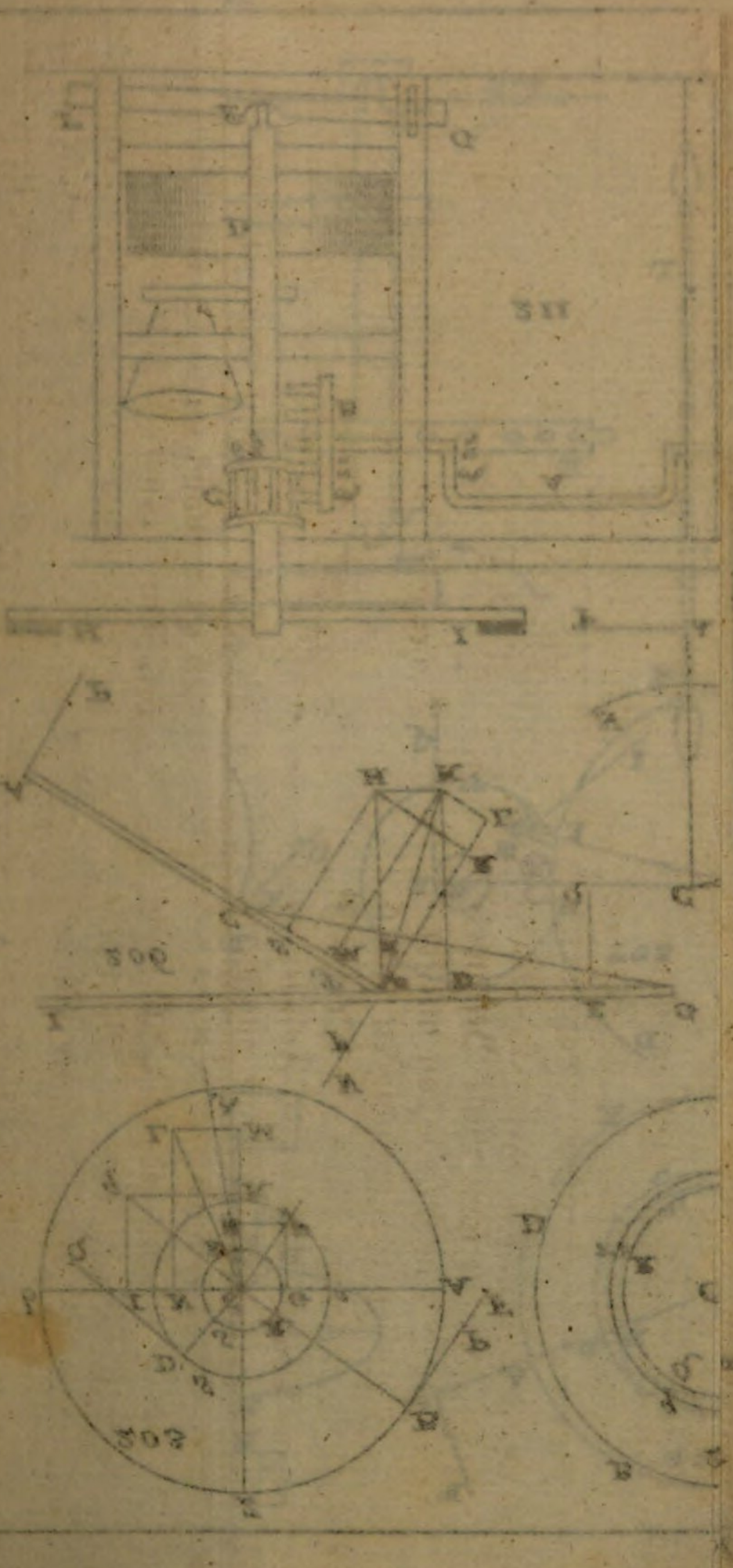
209

206

208

210

212



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, 1732-1787

Lehrbegrif der gesamten Mathematik

Bd.: 4

Greifswald 1769

Math.u. 85-4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625587-8
VD18 80340423-001